

# Basiswissen Geometrie

## Lösungen

Andreas Stämpfli



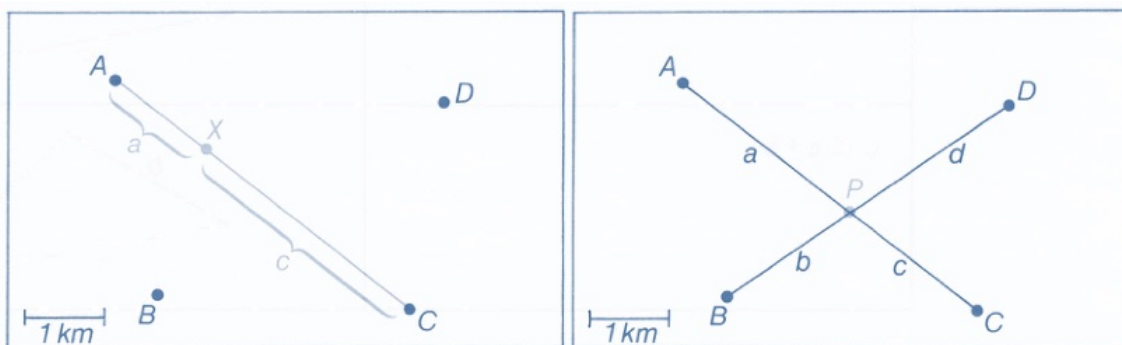
|           |                                                               |           |
|-----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>WAS IST GEOMETRIE?</b>                                     | <b>5</b>  |
| <b>2</b>  | <b>GRUNDBEGRIFFE</b>                                          | <b>5</b>  |
| <b>3</b>  | <b>SPIEGELN</b>                                               | <b>5</b>  |
| <b>4</b>  | <b>WINKELHALBIERENDE</b>                                      | <b>6</b>  |
| <b>5</b>  | <b>MITTESENKRECHTE</b>                                        | <b>6</b>  |
| <b>6</b>  | <b>DREHSYMMETRIE</b>                                          | <b>6</b>  |
| <b>7</b>  | <b>WINKEL</b>                                                 | <b>7</b>  |
| <b>8</b>  | <b>SPIEGELN AN EINEM PUNKT</b>                                | <b>7</b>  |
| <b>9</b>  | <b>VERSCHIEBEN</b>                                            | <b>8</b>  |
| <b>10</b> | <b>WINKELBEZEICHNUNGEN UND EIGENSCHAFTEN</b>                  | <b>9</b>  |
| 10.1      | SCHWELTELWINKEL                                               | 9         |
| 10.2      | WINKEL: BEZEICHNUNGEN UND ZUSAMMENHÄNGE AN PARALLELEN GERADEN | 9         |
| 10.3      | GEOMETRISCHE ÖRTER (ORTSLINIEN)                               | 9         |
| <b>11</b> | <b>WINKELSUMME IM DREIECK</b>                                 | <b>10</b> |
| <b>12</b> | <b>KONGRUENTE DREIECKE – DIE KONGRUENZSÄTZE</b>               | <b>11</b> |
| 12.1      | DER SSS-KONGRUENZSATZ                                         | 11        |
| 12.2      | DER SWS-KONGRUENZSATZ                                         | 11        |
| 12.3      | DER SSW-KONGRUENZSATZ                                         | 11        |
| 12.4      | DER WSW KONGRUENZSATZ                                         | 11        |
| 12.5      | KONGRUENZSÄTZE: ZUSAMMENFASSUNG                               | 11        |
| <b>13</b> | <b>ÄHNLICHKEIT</b>                                            | <b>13</b> |
| <b>14</b> | <b>STRAHLENSÄTZE</b>                                          | <b>13</b> |
| <b>15</b> | <b>SÄTZE: DIE WENN – DANN FORM</b>                            | <b>15</b> |
| <b>16</b> | <b>SÄTZE: BEWEISEN</b>                                        | <b>16</b> |
| <b>17</b> | <b>DREIECKSHILFSLINIEN</b>                                    | <b>17</b> |
| <b>18</b> | <b>DAS GLEICHSCHEKKLIGE DREIECK</b>                           | <b>17</b> |
| <b>19</b> | <b>DAS GLEICHSEITIGE DREIECK</b>                              | <b>17</b> |
| <b>20</b> | <b>DAS RECHTWINKLIGE DREIECK</b>                              | <b>17</b> |
| <b>21</b> | <b>DREIECKSKONSTRUKTIONEN</b>                                 | <b>17</b> |
| <b>22</b> | <b>KONSTRUKTION VON VIERECKEN</b>                             | <b>25</b> |
| <b>23</b> | <b>EINTEILUNG DER VIERECKE</b>                                | <b>28</b> |
| <b>24</b> | <b>DER SATZ DES PYTHAGORAS</b>                                | <b>29</b> |
| 24.1      | DER KATHETENSATZ (SATZ VON EUKLID)                            | 29        |
| 24.2      | DER HÖHENSATZ                                                 | 29        |
| 24.3      | VERMISCHTE AUFGABEN ZU DEN PYTHAGORÄISCHEN SÄTZEN             | 29        |
| <b>25</b> | <b>DIE FLÄCHE</b>                                             | <b>33</b> |
| <b>26</b> | <b>DER FLÄCHENINHALT DES RECHTECKS</b>                        | <b>33</b> |
| <b>27</b> | <b>DER FLÄCHENINHALT DES PARALLELOGRAMMS</b>                  | <b>33</b> |
| <b>28</b> | <b>DER FLÄCHENINHALT DES DREIECKS</b>                         | <b>33</b> |
| <b>29</b> | <b>DER FLÄCHENINHALT DES TRAPEZES</b>                         | <b>34</b> |

|           |                                                            |           |
|-----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>30</b> | <b>VOM REGELMÄSSIGEN VIELECK ZUM KREIS.....</b>            | <b>36</b> |
| 30.1      | FLÄCHENINHALTE REGELMÄSSIGER VIELECKE .....                | 36        |
| 30.2      | KREISUMFANG UND KREISINHALT .....                          | 38        |
| <b>31</b> | <b>KREISE.....</b>                                         | <b>42</b> |
| 31.1      | STRECKENBERECHNUNGEN AM KREIS .....                        | 42        |
| 31.2      | BEGRIFFE ZUM KREIS .....                                   | 43        |
| 31.3      | TANGENTEN AN EINEN KREIS .....                             | 43        |
| 31.4      | WINKEL IM KREIS .....                                      | 45        |
| <b>32</b> | <b>ÄHNLICHKEIT AM KREIS .....</b>                          | <b>47</b> |
| 32.1      | DER SEHNENSATZ .....                                       | 47        |
| 32.2      | DER SEKANTENSATZ.....                                      | 47        |
| <b>33</b> | <b>WÜRFEL, QUADER, PRISMA UND PYRAMIDE .....</b>           | <b>47</b> |
| 33.1      | WÜRFEL .....                                               | 47        |
| 33.2      | QUADER.....                                                | 48        |
| 33.3      | PRISMA.....                                                | 49        |
| <b>34</b> | <b>VOLUMEN DES QUADERS, PRISMAS UND DER PYRAMIDE .....</b> | <b>49</b> |
| 34.1      | QUADER.....                                                | 49        |
| 34.2      | PRISMA .....                                               | 50        |
| 34.3      | DAS SCHIEFE PRISMA.....                                    | 50        |
| 34.4      | PYRAMIDE.....                                              | 50        |
| <b>35</b> | <b>LÖSUNGEN ZU DEN LERNZIELKONTROLLEN .....</b>            | <b>53</b> |

## 1 Was ist Geometrie?

### A 1.1

Wir vereinfachen zunächst das Problem und suchen den idealen Standort zur Versorgung der Orte A und C. Wo muss er liegen? Er liegt auf der kürzesten Verbindung der beiden Punkte, also auf der Strecke AC, das ist ja gerade die Aussage der Dreiecksungleichung. Jeder Punkt X auf AC ist gleich gut geeignet, immer ist die Länge der Rohrleitung  $a + c = \overline{AC}$ . Dieser Wert ist der kleinste, den Sie für  $a + c$  erreichen können.



Jetzt stellen wir die gleichen Überlegungen für die Orte B und D an. Auch hier liegt der ideale Punkt auf der Strecke BD. Für ihn gilt, dass  $b + d$  den kleinstmöglichen Wert annimmt. Der Rest ist nicht mehr schwierig. Der Punkt P, der von allen vier Orten die kleinste Entfernungssumme hat, ist dann der Punkt, den die beiden Strecken AC und BD gemeinsam haben, also der Schnittpunkt. Für ihn gilt:  $a + b + c + d = \underbrace{a + c} + \underbrace{b + d}$  nimmt den kleinstmöglichen Wert an, da ja beide Teilsummen  $a + c$  und  $b + d$  für diese Lage den kleinsten Wert erreichen.

## 2 Grundbegriffe

-

## 3 Spiegeln

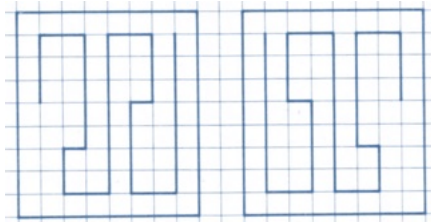
### A 3.1

Man legt unter das Zeichenpapier ein Kohlepapier mit der Kohleschicht nach oben.

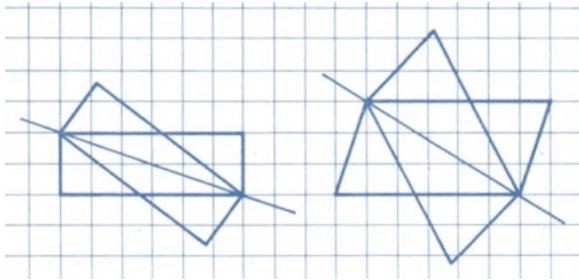
### A 3.2



### A 3.3



### A 3.4



## 4 Winkelhalbierende

---

-

## 5 Mittelsenkrechte

---

### A 5.1

Der gesuchte Ort liegt dort, wo sich die Mittelsenkrechten schneiden. Das heisst, wir ergänzen die drei Orte (Punkte) zu einem Dreieck. Die Menge aller Punkte, welcher von zwei Orten denselben Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten. Derselbe Fall liegt vor, wenn wir einen weiteren Ort dazu nehmen. Die möglichen Orte schränken sich somit ein, auf einen Punkt.

## 6 Drehsymmetrie

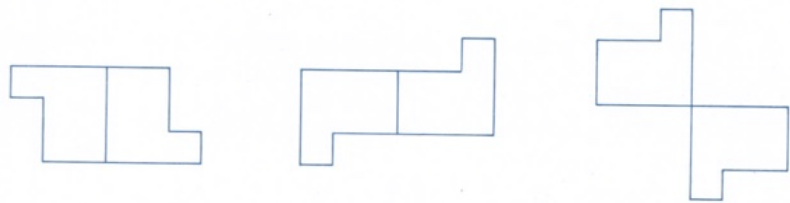
---

### A 6.1

Haben sich die drehsymmetrischen Objekte (Muttern, Speichen) eines Rades zwischen zwei Filmaufnahmen gerade so weit gedreht, dass sie mit einer Speiche aus der vorigen Aufnahme zur Deckung kommt, so scheint das Rad für den Fernsehzuschauer zu stehen.

## A 6.2

a) Beispiele:



b) Es lässt sich keine achsensymmetrische Figur, wohl aber eine achsensymmetrische Fläche legen.

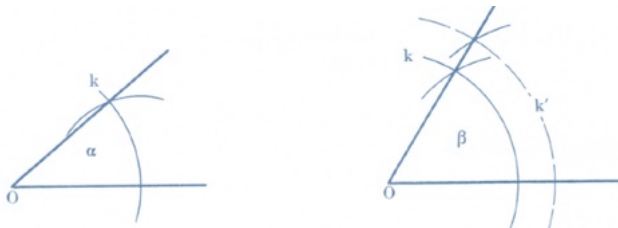
## A 6.3

Der Stern hat zwar die gleiche Drehsymmetrie wie die angegebene Figur, ist aber im Gegensatz zu dieser als Fläche nicht achsensymmetrisch.

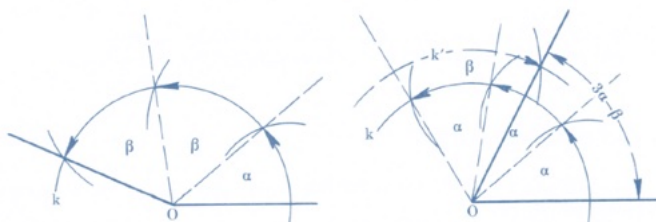


## 7 Winkel

### A 7.1



Aus den Skizzen ist der Gang der Konstruktion ersichtlich. Wichtig ist, beim Übertragen der Winkel darauf zu achten, dass die Bogenöffnung  $k$  immer die gleiche ist.



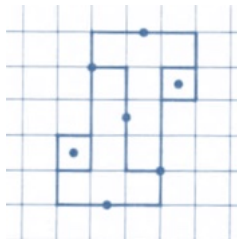
## 8 Spiegeln an einem Punkt

### A 8.1

Nur bei der Spielkarte mit dem König kann die Drehung um  $180^\circ$  festgestellt werden.

## A 8.2

Es gibt mehrere Symmetriezentren:



## 9 Verschieben

### A 9.1

Ist der Punkt  $P$  zu weit von der Geraden  $g$  entfernt, so muss zwischen  $g$  und  $P$  eine (oder mehrere) Hilfslinie(n)  $j$  parallel zu  $g$  gezeichnet werden.

### A 9.2

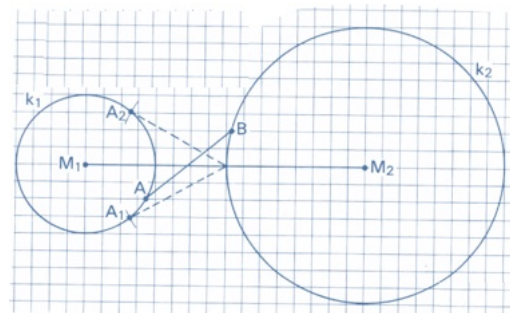
a), b):

Liegt  $B$  auf der Strecke  $M_1M_2$ , so ergeben sich als mögliche Lagen für  $A$  die Schnittpunkte von  $k_1$  mit dem Kreis um  $B$  mit Radius  $r = 3,2$  cm.

c):

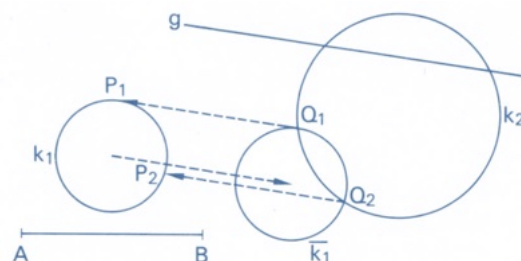
Um  $A$  in die Lage  $A_1$  zu bringen: Drehung um  $22^\circ$  nach rechts; um  $A$  in die Lage  $A_2$  zu bringen: Drehung um  $81^\circ$  nach links.

Bemerkung: Um  $A$  in die Lage  $A_2$  zu bringen, muss man entweder  $A$  erst nach rechts über den Punkt  $A_1$  hinaus und dann in die Lage von  $A_2$  nach links drehen; oder man dreht  $A$  nach links über den Punkt  $A_2$  hinaus und dann wieder nach rechts zurück.



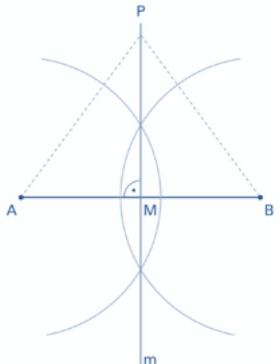
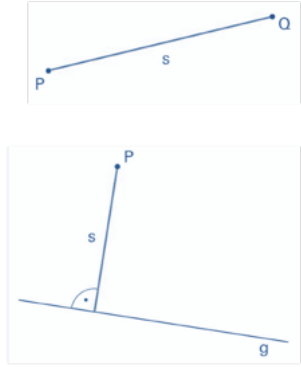
### A 9.3

Man verschiebt  $k_1$  um die Strecke  $AB$  parallel zu  $g$ . Die Schnittpunkte bzw. der Schnittpunkt von  $\bar{k}_1$  und  $k_2$  sind die gesuchten Punkte auf  $k_2$  die Punkte auf  $k_1$  erhält man aus diesen durch die entgegengesetzte Verschiebung.





## A 9.4

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Mittelsenkrechte</b></p> <p>Die Mittelsenkrechte <math>m</math> zweier Punkte <math>A</math> und <math>B</math> ist eine Gerade durch den Mittelpunkt <math>M</math> der Verbindungsstrecke <math>AB</math> senkrecht zu dieser. Jeder Punkt <math>P</math> auf <math>m</math> hat von <math>A</math> und <math>B</math> denselben Abstand.</p> |   |
| <p><b>Lot</b></p> <p>Als Abstand <math>s</math> eines Punktes <math>P</math> von einer Geraden <math>g</math> bezeichnet man die Länge der Strecke <math>s</math> vom Punkt <math>P</math> zum Fusspunkt des <b>Lot</b>s von <math>P</math> auf <math>g</math>.</p>                                                                                   |  |
| <p>Anstelle von Abstand spricht man auch von Distanz oder Entfernung.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                     |

## 10 Winkelbezeichnungen und Eigenschaften

### 10.1 Scheitelwinkel

-

### 10.2 Winkel: Bezeichnungen und Zusammenhänge an parallelen Geraden

#### A 10.1

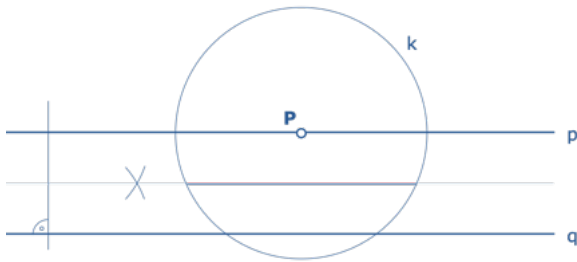
a)  $\alpha = 93^\circ$   $\beta = 87^\circ$  b)  $\alpha = 150^\circ$   $\beta = 30^\circ$

#### A 10.2

Der Winkel bei A wird um  $\alpha$  grösser.

### 10.3 Geometrische Örter (Ortslinien)

#### A 10.3



### A 10.4

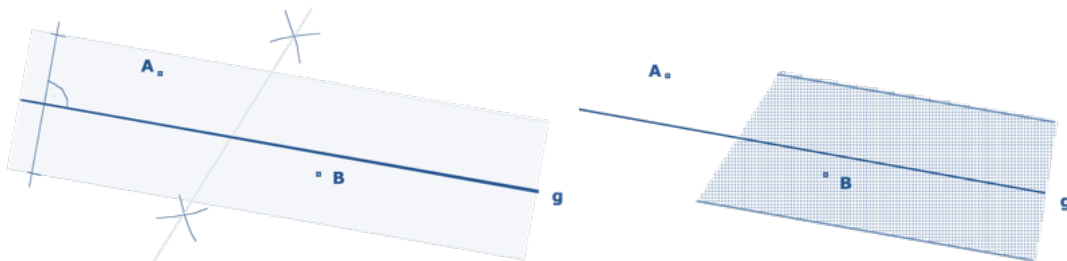
Der Punkt muss im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden liegen:



### A 10.5

$d(Pg) \leq 1.5 \text{ cm}$  : zwei Parallelen im Abstand 1.5 cm von g bilden einen Streifen.  
Die Punkte liegen auf oder zwischen den Parallelen.

$d(PA) > d(PB)$  : Mittelsenkrechte von A und B die Punkte liegen rechts davon, inkl. Rand.



## 11 Winkelsumme im Dreieck

### A 11.1

a)  $\alpha$  wird grösser und  $\gamma$  kleiner.

b)  $\beta$  wird grösser und  $\gamma$  kleiner.

$\alpha$  und  $\beta$  nähern sich beide dem rechten Winkel und  $\gamma$  dem Nullwinkel. Vermutung: Die Summe beträgt  $180^\circ$ .

## A 11.2

a)  $\gamma_1 = \beta = 53^\circ, \gamma_2 = 37^\circ$

b)  $\alpha = 123$

c)  $\alpha = 25^\circ 30', \gamma = 77^\circ, \delta = 51^\circ 30'$

## 12 Kongruente Dreiecke – Die Kongruenzsätze

### 12.1 Der sss-Kongruenzsatz

-

### 12.2 Der sws-Kongruenzsatz

-

### 12.3 Der Ssw-Kongruenzsatz

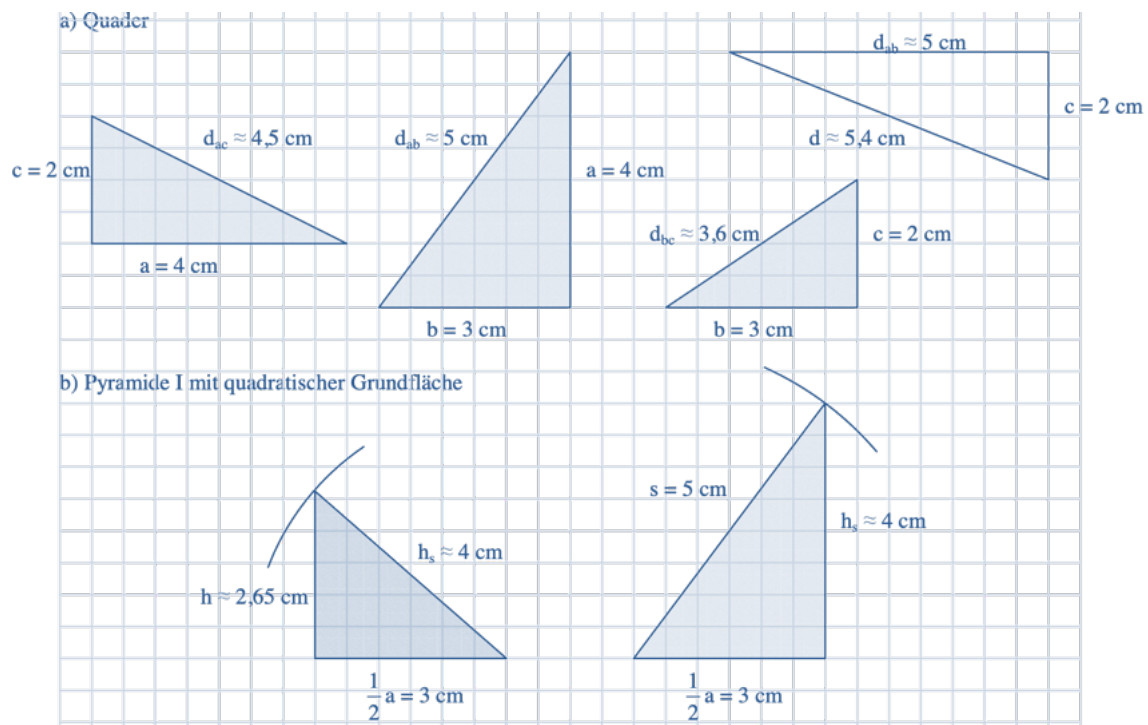
-

### 12.4 Der wsw Kongruenzsatz

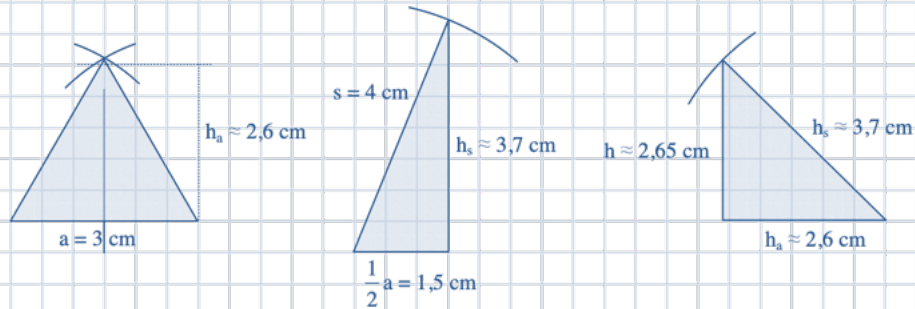
-

### 12.5 Kongruenzsätze: Zusammenfassung

## A 12.1

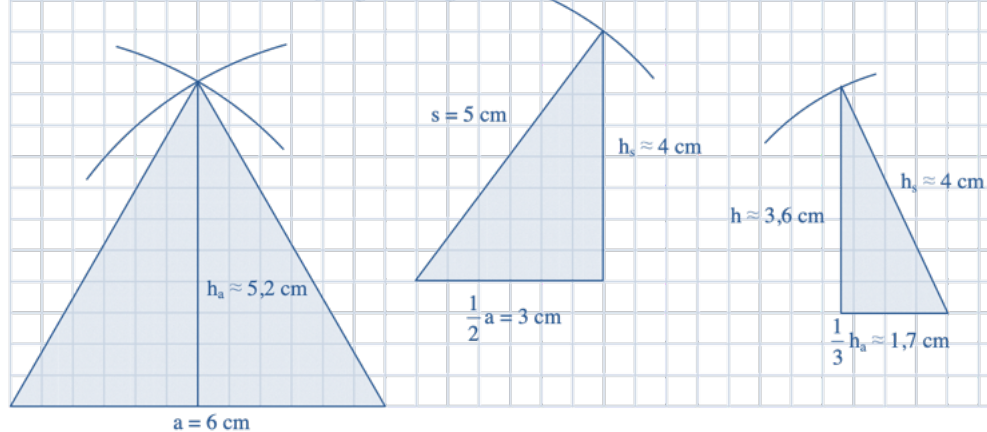


c) Pyramide II mit sechseckiger Grundfläche



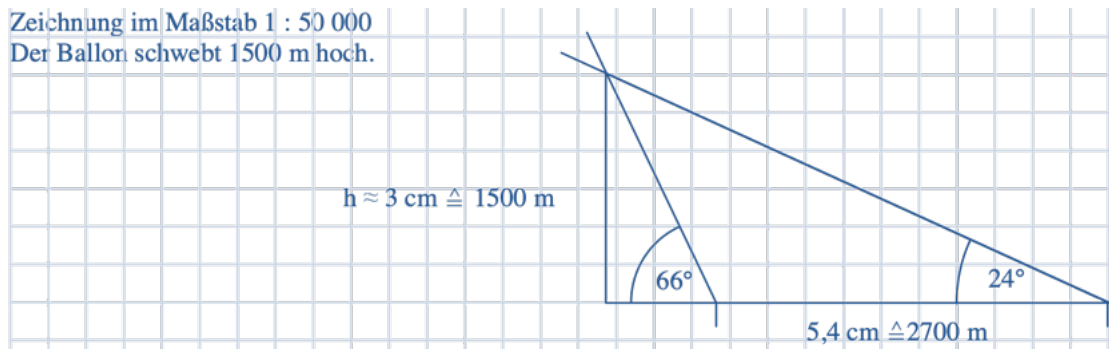
d) Pyramide III mit dreieckiger Grundfläche

Die Seitenhalbierenden = Höhen  $h_a$  im gleichseitigen Dreieck schneiden sich im Verhältnis 1 : 2 !



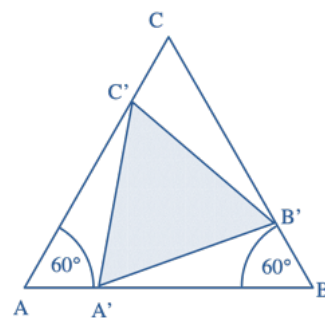
## A 12.2

Zeichnung im Maßstab 1 : 50 000  
Der Ballon schwebt 1500 m hoch.



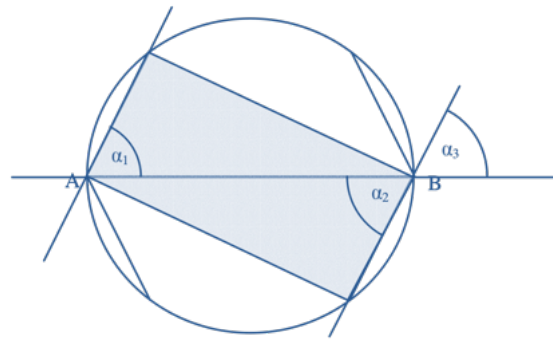
## A 12.3

Die beiden Dreiecke  $AA'C'$  und  $BB'A'$  stimmen in dem Winkel  $60^\circ$  und den beiden Seitenlängen  $\overline{AA'} = \overline{BB'}$  und  $\overline{AC'} = \overline{BA'}$  überein und sind daher nach dem Kongruenzsatz sws kongruent. Insbesondere folgt daraus  $\overline{A'C'} = \overline{A'B'}$ . Aus dem gleichen Grund sind auch die Dreiecke  $BB'A'$  und  $CC'B'$  kongruent, so dass auch  $\overline{B'C'} = \overline{A'B'}$  gilt.



## A 12.4

Nach dem Satz des Thales sind die beiden grauen Dreiecke rechtwinklig. Nach Konstruktion stimmen sie ausserdem in der Länge der Hypotenuse und einer Kathete (=Sehne) überein und sind daher nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent. Insbesondere ist dann  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Für die Scheitelwinkel an B gilt  $\alpha_2 = \alpha_3$ . Die Stufenwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_3$  der Geraden (AB) durch die beiden Sehnen sind also gleiche, d.h., die Sehnen sind parallel.



## 13 Ähnlichkeit

### A 13.1



## 14 Strahlensätze

### A 14.1

6 Meter

### A 14.2

$$\frac{0,2}{1} = \frac{1,5}{|DE|} \text{ wobei } |DE| = 7,5$$

### A 14.3

$$x = \frac{|CD|}{m} \cdot e$$

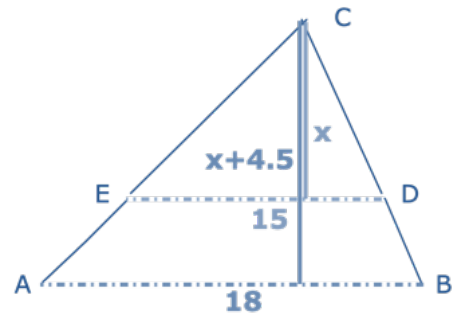
#### A 14.4

a)  $\frac{1.5m}{2.5m} = \frac{\overline{SB_1}}{3.2m}$ , also  $\overline{SB_1} = 1.92 \text{ m}$  b) Länge Glasboden sei  $x$ :  $\frac{1.5m}{2.5m} = \frac{xm}{2m}$ , also  $x = 1.2m$

#### A 14.5

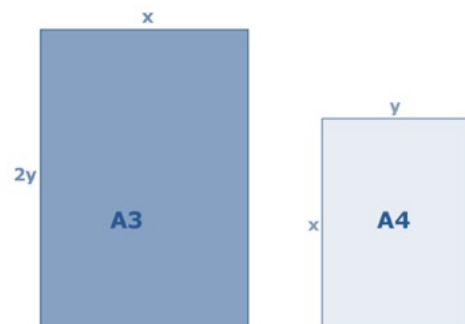
$$\begin{aligned}\frac{x}{15} &= \frac{x+4.5}{18} \\ 18x &= 15(x+4.5) \\ 6x &= 5(x+4.5) \\ 6x &= 5x+22.5 \\ x &= 22.5\end{aligned}$$

Die ursprüngliche Höhe war 27 cm.



#### A 14.6

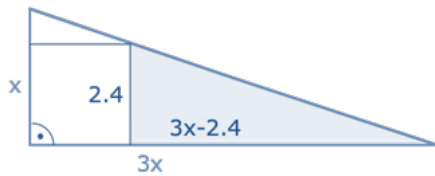
$$\begin{aligned}\frac{x}{2y} &= \frac{y}{x} \\ x^2 &= 2y^2 \\ x &= y\sqrt{2}\end{aligned}$$



$$A = x \cdot y = y\sqrt{2} \cdot y = y^2\sqrt{2} = 625$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}y &\approx 21.0224 \text{ cm} \\ x &\approx 29.7302 \text{ cm}\end{aligned}$$

## A 14.7



$$\begin{aligned}\frac{x}{3x} &= \frac{2.4}{3x - 2.4} \\ x(3x - 2.4) &= 2.4 \cdot 3x \\ 3x^2 - 2.4x &= 7.2x \\ 3x^2 &= 9.6x \quad |:3x \text{ (da } x = 0 \text{ keine Lösung ist)} \\ x &= 3.2\end{aligned}$$

Wir vergleichen (zum Beispiel) das grüne und das ganze rot umrandete Dreieck, die einander ähnlich sind (gleiche Winkel).

Die Katheten messen 3.2 und 9.6.

## 15 Sätze: Die wenn – dann Form

---

### A 15.1

a)

In einem gleichschenkligen Dreieck halbiert die Höhe auf die Basis den Winkel an der Spitze.

**Wenn** ein Dreieck gleichschenklig ist, **dann** halbiert die Höhe auf die Basis den Winkel an der Spitze.

**Voraussetzung:** Das Dreieck ist gleichschenklig.

**Behauptung:** Die Höhe auf die Basis halbiert den Winkel an der Spitze.

b)

In einem Produkt mit dem Wert Null ist mindestens einer der Faktoren Null.

**Wenn** ein Produkt den Wert Null hat, **dann** ist mindestens ein Faktor Null.

**Voraussetzung:** Das Produkt hat den Wert Null.

**Behauptung:** Mindestens ein Faktor ist Null.

c)

Bei einer Sonnenfinsternis schiebt sich der Mond zwischen Erde und Sonne.

**Wenn** sich der Mond zwischen Erde und Sonne schiebt, **dann** gibt es eine Sonnenfinsternis.

**Voraussetzung:** Der Mond schiebt sich zwischen Erde und Sonne.

**Behauptung:** Es gibt eine Sonnenfinsternis.

## 16 Sätze: Beweisen

---

### A 16.1

a)

Wir nehmen an, das Gegenteil des Satzes treffe zu: Es gibt mindestens ein Viereck, bei dem kein Winkel grösser oder gleich 90 Grad ist, daraus folgt, dass in diesem Viereck die Summe der Winkel kleiner als 360 Grad ist. Dies steht aber im Widerspruch zum Satz, dass die Winkelsumme im Viereck stets 360 Grad beträgt. Das Gegenteil des Satzes stimmt also nicht, der ursprüngliche Satz muss somit richtig sein.

b)

- Kehrsatz: Ein Dreieck, in dem zwei Winkel gleich gross sind, ist gleichschenkelig.  
-> Der Kehrsatz ist immer richtig.

- Der Satz ist falsch; ein Viereck mit gleich grossen Winkeln ist im allgemeinen ein Rechteck.

### A 16.2

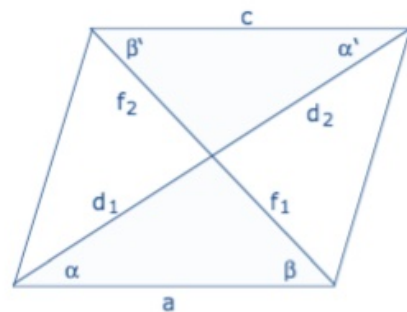
Wir bauen auf den Kongruenzsätzen und den Sätzen über Winkel an Parallelen.

Voraussetzungen:

$$a // c \text{ und } b // d, a = c \text{ und } b = d$$

Die hellblauen Dreiecke sind nach WSW kongruent:

- $a = c$
- $\alpha = \alpha'$  Wechselwinkel an Parallelen
- $\beta = \beta'$  Wechselwinkel an Parallelen



Deshalb gilt:  $d_1 = d_2$  und  $f_1 = f_2$   
w. z. B.w.



## A 16.3

Wir bauen auf die Kongruenzsätze auf:

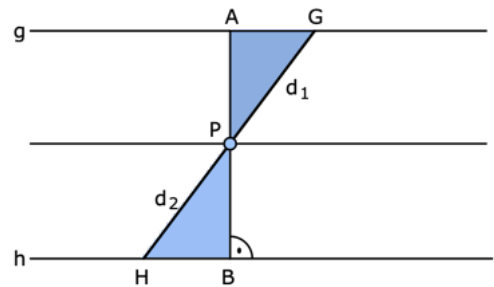
### Voraussetzungen

$g \parallel h$  und  $AP = PB$  für Strecken Senkrecht zu den Parallelen

Wir ziehen die zu den Parallelen senkrechte Strecke  $AB$  durch den Schnittpunkt  $P$  der Strecke  $GH$  mit der Mittelparallelen.

Die beiden blauen Dreiecke sind nach WSW kongruent:

- $AP = PB$
  - die Winkel bei  $B$  und  $A$  messen  $90^\circ$
  - $\angle APG = \angle BPH$  Scheitelwinkel
- Deshalb gilt:  $d_1 = d_2$ , die Strecke  $GH$  wird halbiert.  
w. z. B.w.



## 17 Dreieckshilfslinien

---

## 18 Das gleichschenklige Dreieck

---

## 19 Das gleichseitige Dreieck

---

## 20 Das rechtwinklige Dreieck

## 21 Dreieckskonstruktionen

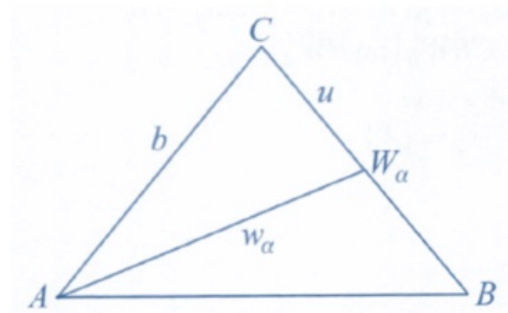
---

## A 21.1

$b = 4,5 \text{ cm}$ ,  $w_\alpha = 5,5 \text{ cm}$ ,  $u = 3 \text{ cm}$  mit  $u = |\overline{W_\alpha C}|$ .

Die Planfigur zeigt:

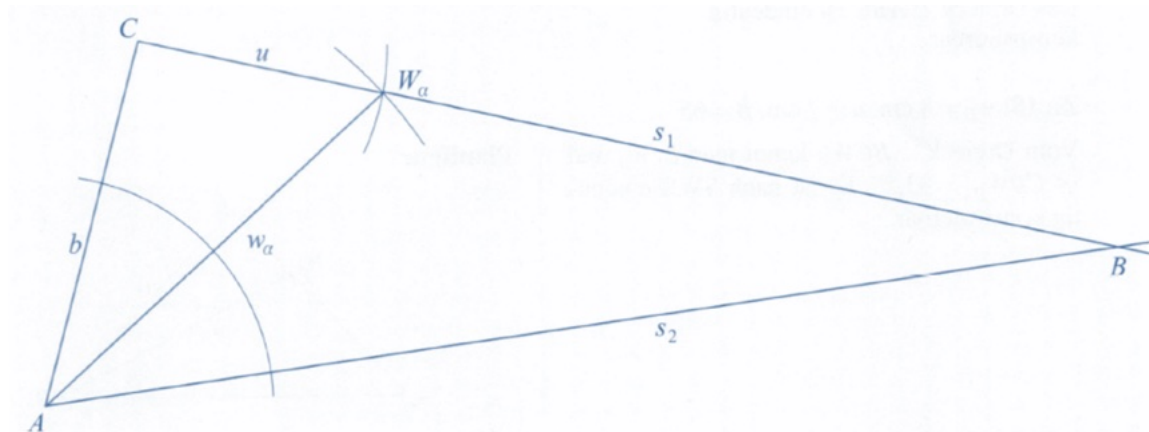
Vom Dreieck  $\triangle AW_\alpha C$  kennt man  $b$ ,  $w_\alpha$  und  $|\overline{W_\alpha C}|$ . Es ist nach SSS eindeutig konstruierbar.



Was weiss man über den Punkt  $B$  ?

- Der Punkt  $B$  liegt einerseits auf dem Strahl  $s_1$  aus  $C$  durch  $W_\alpha$ .
- Verdoppelt man den Winkel  $CAW_\alpha$ , so liegt der Punkt  $B$  andererseits auf dem freien Schenkel  $s_2$  des verdoppelten Winkels.
- Der Punkt  $B$  ist also der Schnittpunkt von  $s_1$  und  $s_2$ .

$|\overline{AC}| = b = 4,5 \text{ cm}$ ;  $K_A(A; r = w_\alpha = 5,5 \text{ cm})$ ;  
 $K_C(C; r = u = 3 \text{ cm})$ ;  $K_A \cap K_C = \{W_\alpha\}$ ;  $\overline{CW_\alpha} = s_1$ ;  
 $|\text{Winkel } CAW_\alpha| \text{ an } \overline{AW_\alpha} \rightarrow s_2$   
 $s_1 \cap s_2 = \{B\}$



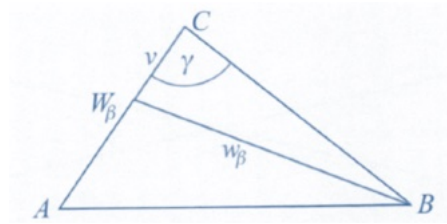
### Winkelhalbierende:

$w_\beta = 5 \text{ cm}$ ,  $v = 3 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 70^\circ$  mit  $v = \overline{CW_\beta}$

### Skizze

Das Teildreieck  $\triangle BCW_\beta$  ist nach SsW eindeutig konstruierbar, denn man kennt  $|\overline{BW_\beta}|$ ,  $|\overline{CW_\beta}|$  und Winkel  $\gamma$ .

Der Punkt  $A$  liegt auf dem Strahl  $\overline{CW_\beta} = s_1$  und dem freien Schenkel  $s_2$  des Doppelten des Winkels  $CBW_\beta$ .



$|\overline{CW_\beta}| = v = 3 \text{ cm}$

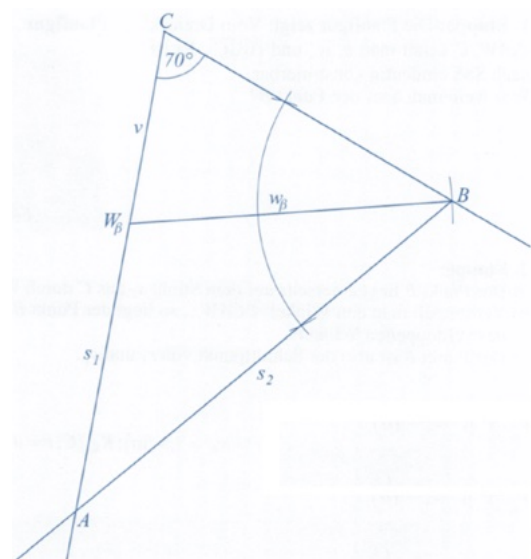
Winkel  $70^\circ$  an  $\overline{CW_\beta}$

$K_{W_\beta}(W_\beta; r = w_\beta = 5 \text{ cm}) \rightarrow B$

Winkel  $CBW_\beta$  an  $\overline{BW_\beta} \rightarrow s_2$

$\overline{CW_\beta} = s_1$

$s_1 \cap s_2 = \{A\}$

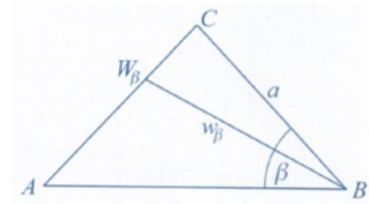


$$w_\beta = 8 \text{ cm}, a = 7 \text{ cm}, \beta = 65^\circ$$

Vom Dreieck  $\triangle BCW_\beta$  kennt man  $a, w_\beta$  und Winkel  $CBW_\beta = 32,5^\circ$ . Es ist nach SWS eindeutig konstruierbar.

**Skizze**

Der Punkt  $A$  liegt auf dem Strahl  $\overrightarrow{CW_\beta}$  und dem freien Schenkel des Winkels  $\beta$ .

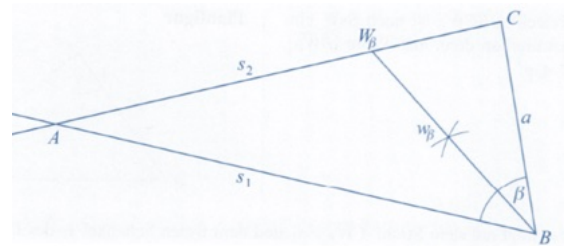


$$|\overline{BC}| = a = 7 \text{ cm}; \sphericalangle 32,5^\circ \text{ an } \overline{BC};$$

$$K(B; r = w_\beta = 8 \text{ cm}) \rightarrow W_\beta;$$

$$\sphericalangle 65^\circ \text{ an } \overline{BC} \rightarrow s_1$$

$$\overrightarrow{CW_\beta} \rightarrow s_2; s_1 \cap s_2 = \{A\}$$



## Seitenhalbierende

$$c = 7 \text{ cm}, s_a = 7,5 \text{ cm}, \beta = 65^\circ$$

Das Dreieck  $\triangle ABM_a$  ist nach SsW eindeutig konstruierbar.

$C$  erhält man durch Verdoppelung der Strecke  $\overline{BM_a}$ .

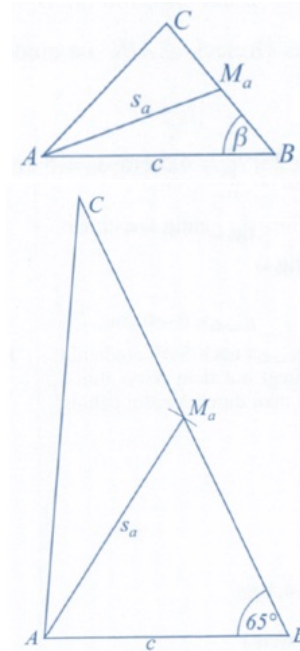
$$|\overline{AB}| = c = 7 \text{ cm}$$

$$\sphericalangle 65^\circ \text{ an } \overline{BA}$$

$$K(A; r = s_a = 7,5 \text{ cm}) \rightarrow M_a$$

Verdoppelung  $\overline{BM_a} \rightarrow C$

## Skizze

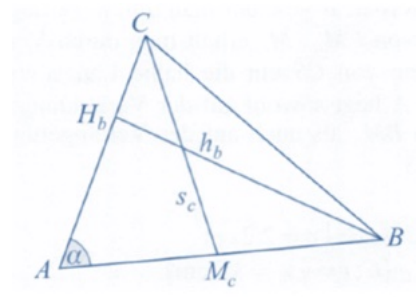


$$h_b = 7 \text{ cm}, s_c = 8 \text{ cm}, \alpha = 55^\circ$$

Im Dreieck  $\triangle ABH_b$  kann Winkel  $\angle ABH_b$  berechnet werden. Er ist  $90^\circ - 55^\circ$ , also  $35^\circ$  gross. Nun ist das Dreieck  $\triangle ABH_b$  nach WSW eindeutig konstruierbar.

$M_c$  ist die Mitte von  $\overline{AB}$ . Punkt  $C$  liegt auf dem Kreis  $K$  um  $M_c$  mit dem Radius  $r = s_c$  und auf dem Strahl  $AH_b$ .

## Skizze



$$|\overline{BH_b}| = h_b = 7 \text{ cm}$$

$$g(H_b) \perp h_b$$

$$\sphericalangle 35^\circ \text{ an } \overline{BH_b} \rightarrow A$$

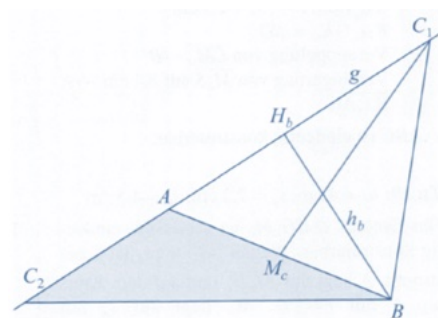
$$\overline{AB} \text{ halbieren} \rightarrow M_c$$

$$K_{M_c}(M_c; r = s_c = 8 \text{ cm})$$

$$K_{M_c} \cap g = \{C_1, C_2\}$$

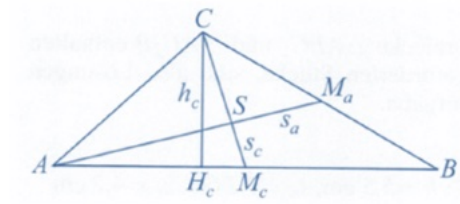
$$\overline{BC_1}, \overline{BC_2}$$

Die Dreiecke  $\triangle ABC_1$  und  $\triangle AC_2B$  enthalten alle geforderten Stücke, sind also Lösungen der Aufgabe.



$$h_c = 4 \text{ cm}, s_a = 7,2 \text{ cm}, s_c = 4,5 \text{ cm}$$

**Skizze**



Das Dreieck  $\triangle CH_cM_c$  ist nach SsW eindeutig konstruierbar. Wegen  $|\overline{CS}| = \frac{2}{3}s_c$  ist  $S$  bestimmt.  $A$  liegt auf  $\overline{M_cH_c}$  und auf dem Kreis um  $S$  mit  $r = \frac{2}{3}s_a$ .  $M_a$  liegt auf  $s_a$  mit  $|\overline{AM_a}| = s_a$ .  $B$  liegt auf dem Strahl  $\overline{CM_a}$  und auf dem Strahl  $\overline{AM_c}$ .

$$|\overline{CH_c}| = h_c = 4 \text{ cm}$$

$$g(H_c) \perp CH_c$$

$$K_C(C; r = s_c = 4,5 \text{ cm})$$

$$K_C \cap g = \{M_c\}$$

$$\text{Punkt } S \text{ durch } |CS| = \frac{2}{3}s_c = 3 \text{ cm}$$

$$K_S\left(S; r = \frac{2}{3}s_a = 4,8 \text{ cm}\right)$$

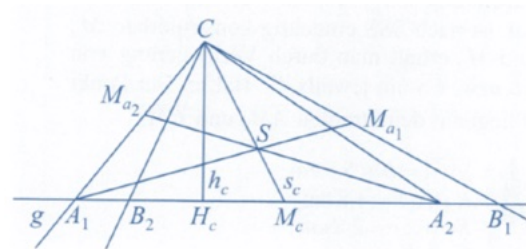
$$K_S \cap g = \{A_1, A_2\}$$

$$\text{Auf } \overline{A_1S} \text{ liegt } M_{a_1} \text{ mit } |\overline{A_1M_{a_1}}| = 7,2 \text{ cm}$$

$$\text{Auf } \overline{A_2S} \text{ liegt } M_{a_2} \text{ mit } |\overline{A_2M_{a_2}}| = 7,2 \text{ cm}$$

$$\overline{CM_{a_1}} \cap \overline{A_1M_c} = \{B_1\}$$

$$\overline{CM_{a_2}} \cap \overline{A_2M_c} = \{B_2\}$$



Die Dreiecke  $\triangle A_1B_1C$  und  $\triangle A_2CB_2$  enthalten alle geforderten Stücke, sind also Lösungen der Aufgabe.

## Mittelsenkrechte

$$a = 6 \text{ cm}, r = 4 \text{ cm}, \gamma = 60^\circ.$$

## Skizze

Im gleichschenkligen Dreieck  $\triangle BCM$  kennt man die Längen aller Seiten. Es ist nach SSS eindeutig konstruierbar.

Der Punkt  $A$  liegt auf dem freien Schenkel des Winkels  $\gamma$  und auf dem Kreis  $K$  um  $M$  mit dem Radius  $r$ .

$$|\overline{BC}| = a = 6 \text{ cm}$$

$$K_B(B; r = 4 \text{ cm})$$

$$K_C(C; r = 4 \text{ cm})$$

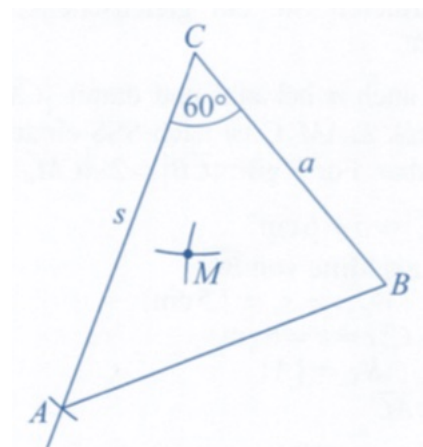
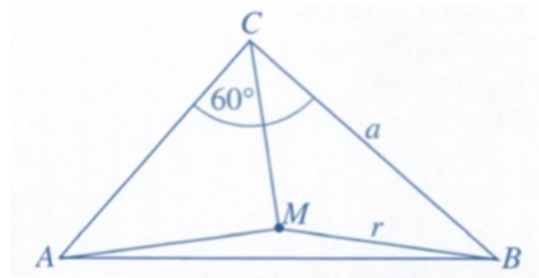
$$K_B \cap K_C = \{M\}$$

$$\text{Winkel } 60^\circ \text{ an } \overline{CB} \rightarrow s$$

$$K_M(M; r = 4 \text{ cm})$$

$$K_M \cap s = \{A\}$$

$$\overline{AB}$$



## A 21.2

a)

Ein gleichschenkliges Dreieck hat mindestens zwei gleich lange Seiten. Diese werden Schenkel genannt. Sie schliessen den Winkel an der Spitze ein. Ihm gegenüber liegt die Grundseite oder Basis des gleichschenkligen Dreiecks. Die Innenwinkel an Basis sind gleich gross. Die Seitenhalbierende der Basis ist die Symmetrieachse des Dreiecks. Sie ist gleichzeitig Höhe, Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze.

Ein gleichseitiges Dreieck hat drei gleich lange Seiten. Es ist immer auch ein gleichschenkliges Dreieck. Seine Innenwinkel sind alle gleich gross, das Winkelmass beträgt  $60^\circ$ . Jede Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck ist Symmetrieachse. Jede Seitenhalbierende ist also zugleich Höhe, Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende.

b)

Zeichnet man in einem Halbkreis über dem Durchmesser einen Winkel, dessen Scheitel auf dem Halbkreis liegt und dessen Schenkel in den Endpunkten des Durchmessers

enden, so ist dieser Winkel ein rechter Winkel, d.h. sein Winkelmass beträgt 90. In Kurzfassung: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

**c)**

Im gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreieck sind die Basiswinkel  $45^\circ$  gross. Die Höhe auf der Basis halbiert die Basis. Sie erzeugt zwei Teildreiecke, die ebenfalls gleichschenkligh-rechtwinklig sind. Die Schenkel dieser Teildreiecke sind jeweils die Höhe und eine halbe Basis, d.h., die Höhe auf die Basis eines gleichschenkligh rechtwinkligen Dreiecks ist halb so lang wie die Basis des Dreiecks.

**d)**

Gleich grossen Winkeln liegen gleich lange Seiten gegenüber und umgekehrt. Dem größeren von zwei Winkeln liegt auch die längere von zwei Seiten gegenüber und umgekehrt.

**e)**

Die Lotgerade durch eine Dreiecksecke auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung heisst eine Höhe des Dreiecks. Oft wird auch nur die Strecke zwischen der Ecke und dem Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Dreiecksseite als Höhe bezeichnet. Die Höhen in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt, der Höhenschnittpunkt genannt wird.



## 22 Konstruktion von Vierecken

### A 22.1

Wird ein Winkel im Viereck grösser, so wird auch ein Winkel kleiner. Zieht man gegenüberliegende Ecken auseinander, so werden die beiden Winkel an diesen Ecken kleiner, die andern Winkel im Viereck werden dafür grösser.

### A 22.2

a)

$a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $c = 5,5 \text{ cm}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ , **Skizze**  
 $e = 6,5 \text{ cm}$

Das Dreieck  $\triangle ABC$  ist nach dem Kongruenzsatz SSS eindeutig konstruierbar.

Was weiss man über den Punkt  $D$  ?

$D$  liegt einerseits auf dem Kreis  $K_1$  um  $A$  mit  $r = d = 5 \text{ cm}$  und andererseits auf dem Kreis  $K_2$  um  $C$  mit  $r = c = 5,5 \text{ cm}$ .  $D$  ist also der Schnittpunkt von  $K_1$  und  $K_2$ .

$$|\overline{AB}| = a = 6 \text{ cm}$$

$$K_3(A; r = e = 6,5 \text{ cm})$$

$$K_4(B; r = b = 3 \text{ cm})$$

$$K_3 \cap K_4 = \{C\}$$

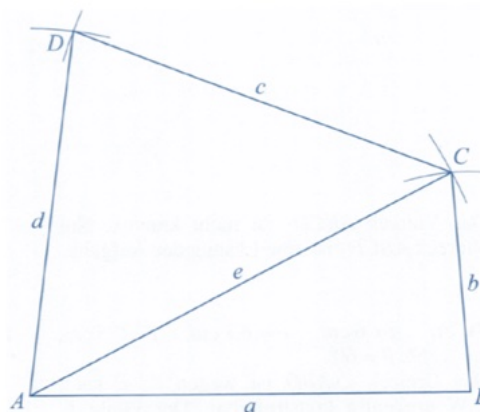
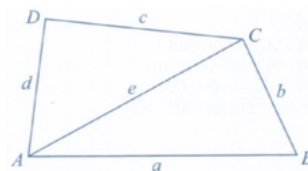
$$\overline{BC}$$

$$K_1(A; r = d = 5 \text{ cm})$$

$$K_2(C; r = c = 5,5 \text{ cm})$$

$$K_1 \cap K_2 = \{D\}$$

$$\overline{AD} \text{ und } \overline{CD}$$



b)

$$a = 6,8 \text{ cm}, b = 3,3 \text{ cm}, d = 8 \text{ cm}, \\ e = 9 \text{ cm}, f = 7,2 \text{ cm}$$

**Skizze**

Das Dreieck  $\triangle ABC$  ist nach SSS eindeutig konstruierbar. Der Punkt  $D$  liegt sowohl auf dem Kreis  $K_3$  um  $A$  mit  $r = d = 8 \text{ cm}$  als auch auf dem Kreis  $K_4$  um  $B$  mit  $r = f = 7,2 \text{ cm}$ .

$$|\overline{AB}| = a = 6,8 \text{ cm}$$

$$K_1(A; r = e = 9 \text{ cm})$$

$$K_2(B; r = b = 3,3 \text{ cm})$$

$$K_1 \cap K_2 = \{C\}$$

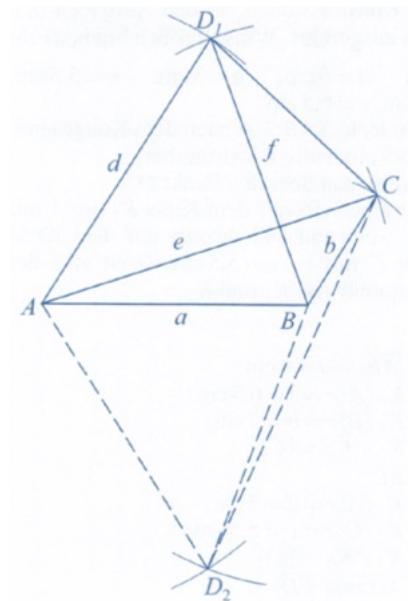
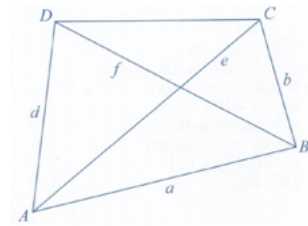
$$\overline{BC}$$

$$K_3(A; r = d = 8 \text{ cm})$$

$$K_4(B; r = f = 7,2 \text{ cm})$$

$$K_3 \cap K_4 = \{D_1, D_2\}$$

$$\overline{CD_1}, \overline{CD_2} \text{ und } \overline{AD_1}, \overline{AD_2}$$



c)

$a = 6\text{cm}, c = 6,8\text{cm}, f = 7,5\text{cm}, \alpha = 126^\circ, \beta = 60^\circ$

**Skizze**

Das Dreieck  $\triangle ABD$  ist wegen  $f > a$  nach SsW eindeutig konstruierbar. Der Punkt  $C$  liegt auf dem freien Schenkel des Winkels  $\beta$  und auf dem Kreis  $K$  um  $D$  mit  $r = c = 6,8\text{ cm}$ .

$|\overline{AB}| = a = 6\text{ cm}$

Winkel  $\alpha, \alpha = 126^\circ$  an  $\overline{AB} \rightarrow s_1$

$K_1(B; r = f = 7,5\text{ cm})$

$K_1 \cap s_1 = \{D\}$

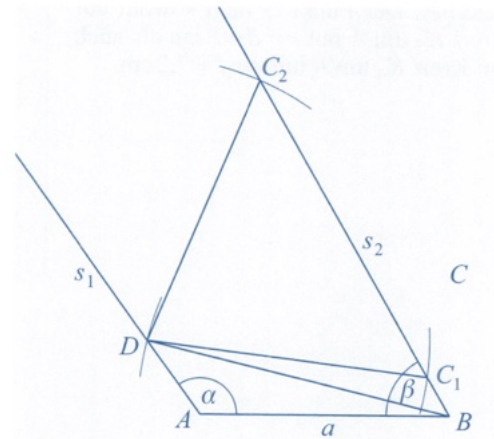
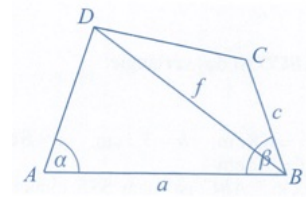
Winkel  $\beta, \beta = 60^\circ$  an  $\overline{BA} \rightarrow s_2$

$K_2(D; r = c = 6,8\text{ cm})$

$K_2 \cap s_2 = \{C_1, C_2\}$

$\overline{DC_1}, \overline{DC_2}$

Wegen  $c < f$  ist das Dreieck  $\triangle ABC$  nicht nach SsW eindeutig konstruierbar. Die Aufgabe hat zwei Lösungen.



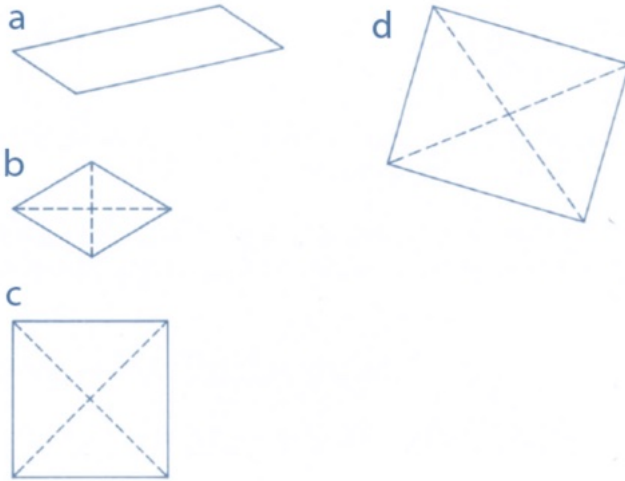
### A 22.3

- D hat den grössten Abstand von A, wenn B, C und D auf einer Geraden liegen; der Abstand beträgt dann 51,5 cm.
- Der Abstand beträgt 50,8 cm.
- Der Punkt C bewegt sich auf dem Kreisbogen um B mit Radius  $r = 35\text{ cm}$ .

## 23 Einteilung der Vierecke

---

### A 23.1



### A 23.2

Möglicher Lösungsweg:

$\overline{BL} = \overline{AR} = 8\text{cm}$  (gleichschenkliges Trapez  
→ siehe Figur)

$$\overline{AL} = 20\text{cm} \text{ und } \overline{AC} = \sqrt{\overline{CL}^2 + \overline{AL}^2} = 25\text{cm}$$

Da  $\overline{AS} : \overline{SC} = 28 : 12$  « x-Figur », gilt

$$\text{für } \overline{AS} = x \text{ dann } x : (\overline{AC} - x) = 28 : 12$$

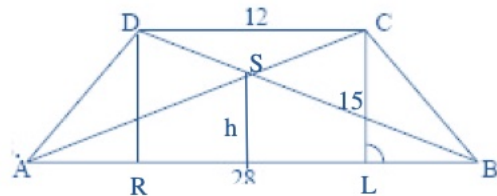
$$\rightarrow x = \overline{AS} = 17.5\text{ cm} \text{ und } \overline{SC} = 7.5\text{ cm}$$

$$\overline{AC} : 15 = \overline{AS} : h \rightarrow h = 10.5\text{ cm}$$

$$\rightarrow A_{\text{ABS}} = \frac{1}{2} \cdot 28\text{ cm} \cdot 10.5\text{ cm} = \underline{\underline{147\text{ cm}^2}}$$

$$h_{\text{CDS}} = 15\text{ cm} - 10.5\text{ cm} = 4.5\text{ cm}$$

$$\rightarrow A_{\text{CDS}} = \frac{1}{2} \cdot 12\text{ cm} \cdot 4.5\text{ cm} = \underline{\underline{27\text{ cm}^2}}$$



## 24 Der Satz des Pythagoras

---

### 24.1 Der Kathetensatz (Satz von Euklid)

---

### 24.2 Der Höhensatz

---

#### A 24.1

a)  $D = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$

b)  $h = \sqrt{(21m)^2 - (4m)^2 - (5m)^2} = 20m$

c)  $D = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{3} \cdot 5 = 8.66$

d)  $81 = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{3} \cdot a \Rightarrow a = \frac{81}{\sqrt{3}} = 46.77$

### 24.3 Vermischte Aufgaben zu den pythagoräischen Sätzen

---

#### A 24.2

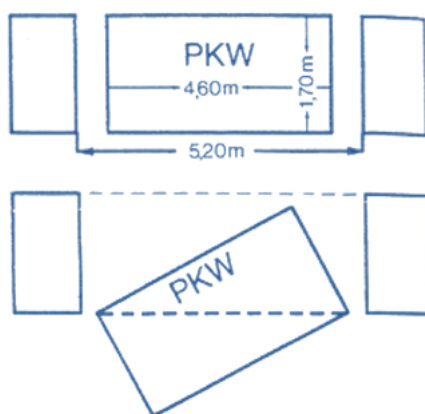
Schrankhöhe (max.)  $\approx 2,32m$

#### A 24.3

Handlungsvorstellung: Küchenpapierrolle längs aufschneiden; Schnur = 20cm

#### A 24.4

$$\sqrt{4,60^2 + 1,70^2} \text{ m} \approx 4,90 \text{ m} < 5,20 \text{ m}$$



## A 24.5

Geg:  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$  und  $c = 5 \text{ cm}$

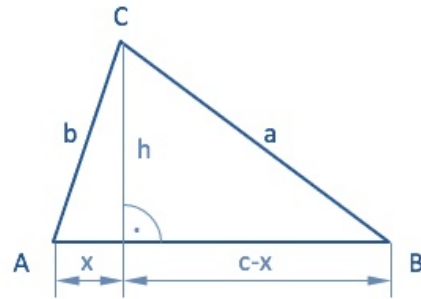
Ges:  $A = ?$

Möglicher Lösungsweg:

$$A = \frac{c \cdot h}{2} \quad (1)$$

$$h^2 = b^2 - x^2 \quad (2)$$

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2 \quad (3)$$



Somit :

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2 \rightarrow$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) \rightarrow$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2 \rightarrow$$

$$2cx = b^2 - a^2 + c^2 \rightarrow$$

$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} = \frac{4^2 - 6^2 + 5^2}{2 \cdot 5} = 0,50[\text{cm}] \quad (4)$$

(4) in (2):

$$h^2 = 4^2 - 0,5^2 \rightarrow$$

$$h = \sqrt{4^2 - 0,5^2} = 3,97 [\text{cm}] \quad (5)$$

(5) in (1):

$$A = \frac{5 \cdot 3,97}{2} = \underline{\underline{9,92[\text{cm}^2]}}$$

## A 24.6

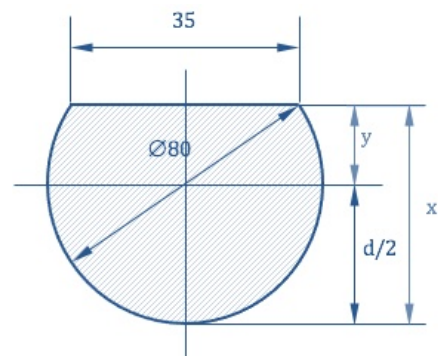
Lösungsweg, Vorschlag:

$$(1) \quad x = y + \frac{d}{2}$$

$$(2) \quad y = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{80}{2}\right)^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2} = 35,97 [\text{mm}]$$

(2) in (1):

$$x = 35,97 + \frac{80}{2} = \underline{\underline{75,97[\text{mm}]}}$$



### A 24.7

Geg:  $A = 1'320 \text{ cm}^2$ ,  $a = 50 \text{ cm}$

Ges:  $b, c, h, p, q$

Mögliches Vorgehen:

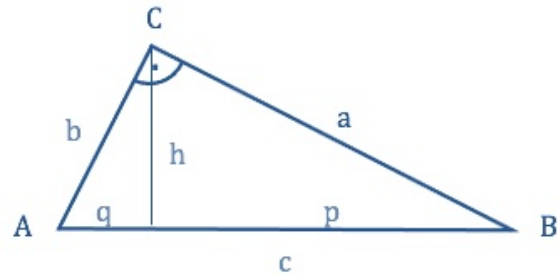
$$A = \frac{a \cdot b}{2} \rightarrow b = \frac{2 \cdot A}{a} = \frac{2 \cdot 1'320}{50} = \underline{\underline{52,80 \text{ [cm]}}}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{50^2 + 52,80^2} = 72,72 \text{ [cm]}$$

$$A = \frac{c \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{2 \cdot A}{c} = \frac{2 \cdot 1'320}{72,72} = 36,30 \text{ [cm]}$$

$$p = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{50^2 - 36,30^2} = 34,38 \text{ [cm]}$$

$$q = c - p = 72,72 - 34,38 = 38,34 \text{ [cm]}$$



### A 24.8

Geg:  $a = 85 \text{ cm}$ ,  $c = 63 \text{ cm}$ ,  $h = 55 \text{ cm}$

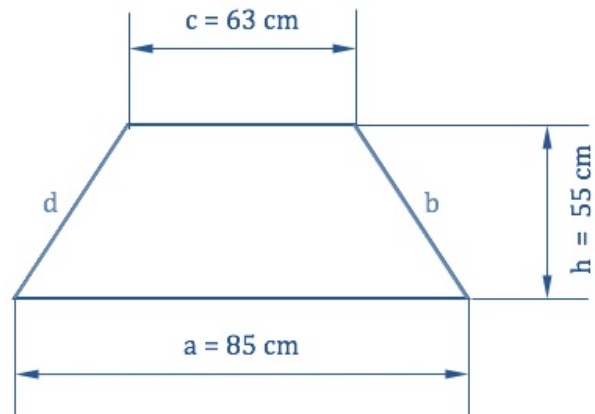
Ges:  $U = ?$

Mögliches Vorgehen:

$$U = a + b + c + d$$

$$b = d = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} \rightarrow$$

$$b = d = \sqrt{55^2 + \left(\frac{85-63}{2}\right)^2} = 56,09 \text{ [cm]}$$



Somit :

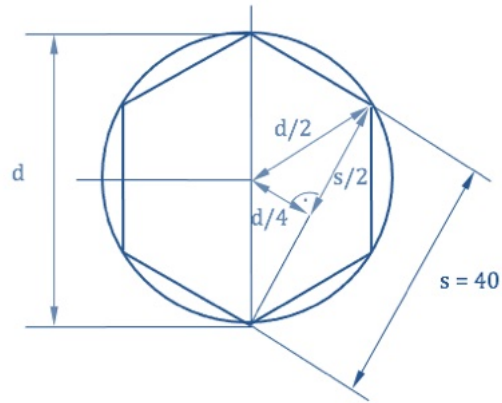
$$U = 85 + 56,09 + 63 + 56,09 = 260,18 \text{ [cm]} = 2,60 \text{ [m]}$$

## A 24.9

Ges:  $d=?$

Mögliches Vorgehen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{2}\right)^2 &= \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 \rightarrow \\ \left(\frac{2d}{4}\right)^2 - \left(\frac{d}{4}\right)^2 &= \left(\frac{s}{2}\right)^2 \rightarrow \\ \frac{4d^2}{16} - \frac{d^2}{16} &= \frac{s^2}{4} \rightarrow \\ \frac{3d^2}{16} &= \frac{s^2}{4} \rightarrow \\ d^2 &= \frac{s^2 \cdot 16}{4 \cdot 3} = \frac{4 \cdot s^2}{3} \rightarrow \\ d &= \sqrt{\frac{4 \cdot s^2}{3}} = \frac{2 \cdot s}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 40}{\sqrt{3}} = 46,19 [\text{mm}] \end{aligned}$$



## A 24.10

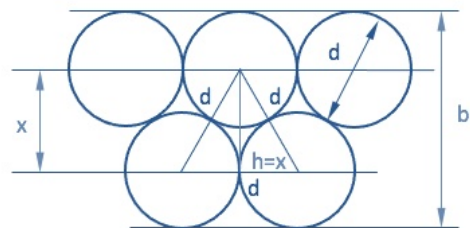
Geg:  $d$

Ges:  $x$  und  $b$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \rightarrow \\ x &= \sqrt{\frac{4 \cdot d^2 - d^2}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot d^2}{4}} = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{d \cdot 0,87}} \\ b &= x + d = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + d = d \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \underline{\underline{d \cdot 1,87}} \end{aligned}$$



b)

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{1,73 [\text{cm}]}} \\ b &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \underline{\underline{3,73 [\text{cm}]}} \end{aligned}$$



## 25 Die Fläche

---

-

## 26 Der Flächeninhalt des Rechtecks

---

-

## 27 Der Flächeninhalt des Parallelogramms

---

-

## 28 Der Flächeninhalt des Dreiecks

---

-

### A 28.1

$$A (\text{Trapez}) = 3200 \text{ cm}^2 - 376 \text{ cm}^2 - 500 \text{ cm}^2 = \underline{2324 \text{ cm}^2}$$

### A 28.2

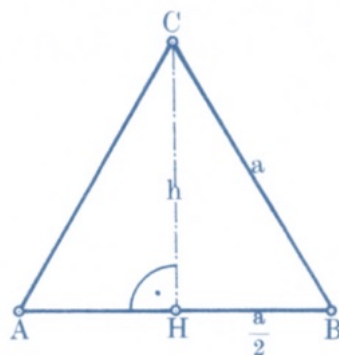
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

In unserem Fall ist  $g = a$  und  $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ .

$$A = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \quad A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$



### A 28.3

Stoffbedarf  $15\text{m}^2$  (ohne Berücksichtigung der Bodenfläche und einer Nahtzugabe)

## A 28.4

Dieser Pantograph vergrößert mit **Faktor 2**. Die Begründung gelingt zum Beispiel mit dem Strahlensatz, oder indem man die Stablängen beim maximal ausgezogenen Gerät vergleicht mit dem maximal zusammengelegten Gerät.

## 29 Der Flächeninhalt des Trapezes

---

### A 29.1

Berechnung und Konstruktion:

$$\begin{aligned} A_{\text{Trapez}} &= \frac{16 + 4.1}{2} \cdot 7.2 \\ &= 72.36 = 2 \cdot A_{\text{Dreieck}} \end{aligned}$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{g \cdot h}{2}$$

$$\frac{2 \cdot A_{\text{Dreieck}}}{g} = h$$

$$\frac{72.36}{16} = 4.5225$$

$$h \approx 4.5 \text{ cm} \Rightarrow 5.6 \text{ oder } 5.7 \text{ cm}$$

Proportion:

$$\frac{2.68}{9 - x} = \frac{4.52}{x}$$

$$2.68x = 40.68 - 4.52x$$

$$7.2x = 40.68$$

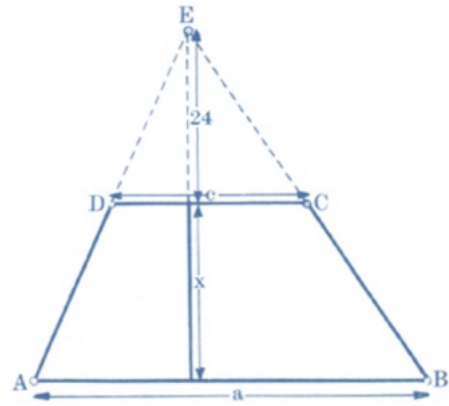
$$x = 5.65 \text{ cm}$$

### A 29.2

$$24: (24 + x) = 18:33$$

$$x = 20\text{cm} \quad (= \text{Höhe des Trapezes})$$

$$A_{\text{Trapez}} = 510\text{cm}^2$$



### A 29.3

$$q = 6\text{cm}, r = 3 \cdot \sqrt{3}\text{cm} = 5,2\text{cm}, s = 5\text{cm}, t = 2 \cdot \sqrt{3}\text{cm} = 3,5\text{cm}$$

### A 29.4

Eigene Lösung. Ev. mit Lehrperson diskutieren.

### A 29.5

Mittellinie:

Aus  $A = m' \cdot h$  folgt:

$$m' = \frac{A}{h} = \frac{24\text{ m}^2}{4\text{ m}} = 6\text{ m}.$$

Grundseite:

Setzen wir  $c = 2a$  in die Gleichung

$$m' = \frac{1}{2}(a + c)$$



ein, erhalten wir eine Gleichung für a:

$$m' = \frac{1}{2}(a + 2a).$$

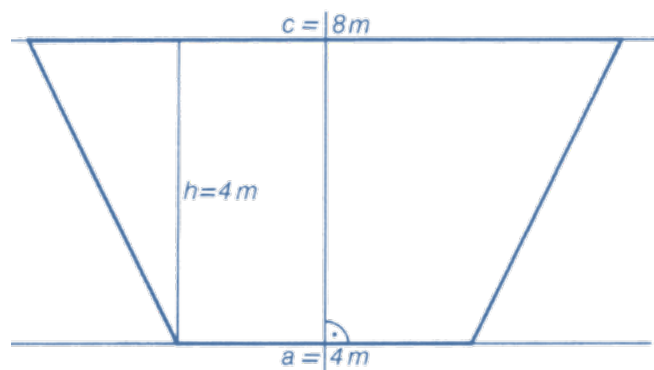
Vereinfachung:  $m' = \frac{3}{2}a$ .

Auflösung nach a:

$$a = \frac{2}{3}m'.$$

$$a = \frac{2}{3} \cdot 6\text{ m} = 4\text{ m},$$

$$c = 2a = 8\text{ m}.$$



Zeichnung:

Ein gleichschenkliges Trapez ist symmetrisch.

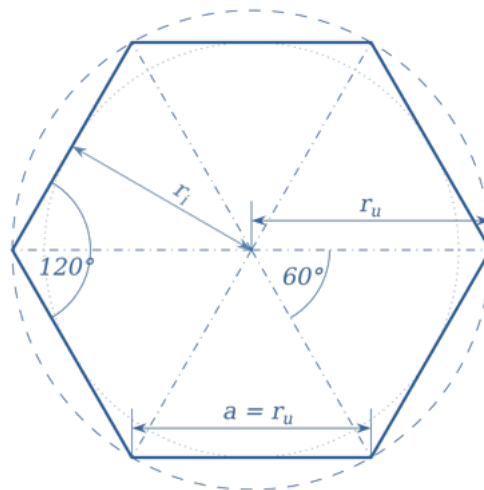
## 30 Vom regelmässigen Vieleck zum Kreis

---

### A 30.1

Der Zentrumsinkel beträgt  $60^\circ$ . Somit kann man eine einzelne Wabe um  $60^\circ$  drehen, damit sie wieder mit sich selber zur Deckung kommt:

Die Seite des regelmässigen 6-Ecks ist gleich dem Umkreisradius  $r_u$ . Man kann also das regelmässige Sechseck ohne den Winkelmesser, allein mit Zirkel und Lineal zeichnen: Auf dem Umkreis zeichnet man einen Streckenzug aus lauter Sehnen der Länge  $r_u$ .



### A 30.2

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{90} = 180^\circ - 4^\circ = 176^\circ$$

## 30.1 Flächeninhalte regelmässiger Vielecke

---

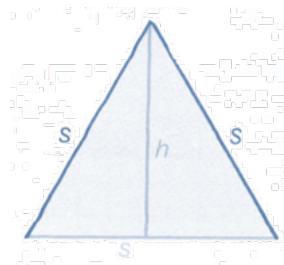
### A 30.3

a)

Das gleichseitige Dreieck hat den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot s \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot s \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} s \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 \end{aligned}$$

Näherung:  $A \approx 0.433s^2$



**b)**

Sechseck

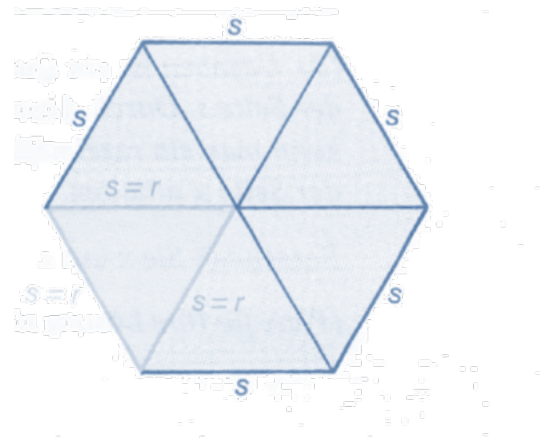
Für jedes Bestimmungsdreieck gilt die oben hergeleitete Flächenformel. Für den Flächeninhalt des Sechsecks erhalten wir deshalb:

$$A = 6 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \right).$$

Durch Vereinfachen:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} s^2.$$

Näherung:  $A \approx 2,60 s^2$ .



**c)**

$$\text{Dreieck } \left( s = \frac{u}{3} \right): A = \left( \frac{u}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} = u^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \approx u^2 \cdot 0,0481$$

$$\text{Sechseck } \left( s = \frac{u}{6} \right): A = \left( \frac{u}{6} \right)^2 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3} = u^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{24} \approx u^2 \cdot 0,0722$$

Wir erkennen: Das Sechseck hat bei gegebenem Umfang  $u$  die grössere Fläche. Möglicherweise bauen deshalb die Bienen ihre Waben 6-eckig: Mit weniger Material lässt sich die Fläche – und damit der Raum – maximieren.

### A 30.4

Wir bestimmen zuerst den Inhalt  $A_1$  des Quadrats plus der vier angesetzten Halbkreise (Radius jeweils  $\frac{a}{2}$ ):

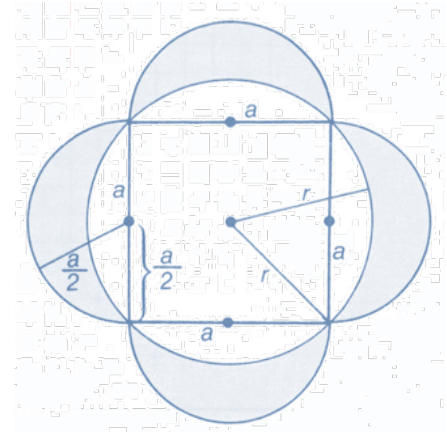
$$\begin{aligned} A_1 &= a^2 + 4 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] \\ &= a^2 + 2 \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} \\ &= a^2 + \pi \cdot \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Dann berechnen wir den Inhalt  $A_2$  des dem Quadrat umschriebenen Kreises:

- Quadratdiagonale:  $d = \sqrt{2}a$ ,
- Radius:  $r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ,
- Inhalt:  $A_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{2}{4}a^2 = \frac{\pi}{2}a^2$ .

$A$  ist dann die Differenz aus  $A_1$  und  $A_2$  :

$$A = A_1 - A_2 = a^2 + \pi \cdot \frac{a^2}{2} - \pi \cdot \frac{a^2}{2} = a^2.$$



### A 30.5

$$A_R = a^2 - \frac{\pi}{4} a^2$$

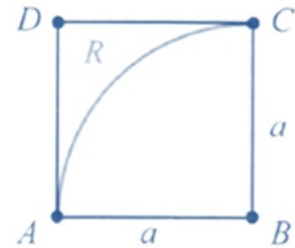
$$A_R = (5 \text{ cm})^2 - \frac{\pi}{4} (5 \text{ cm})^2 \approx 5,365 \text{ cm}^2$$

$$A_F = A_Q - 2 \cdot A_R = 25 \text{ cm}^2 - 2 \cdot 5,365 \text{ cm}^2 \approx \mathbf{14,27 \text{ cm}^2}$$

$$d = \left( a - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2} \right) \cdot 2$$

$$d = \left( 5 \text{ cm} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (5 \text{ cm})^2} \right) \cdot 2$$

$$\underline{\underline{d = 2,93 \text{ cm}}}$$



### A 30.6

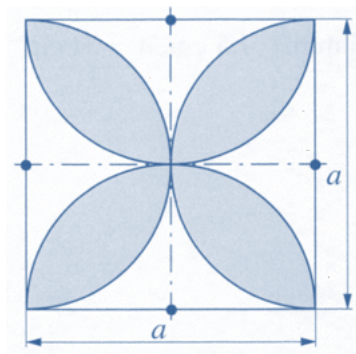
Es genügt die gerasterte Fläche in einem der vier kleinen Quadrate zu berechnen. Dazu wird vom Flächeninhalt  $A_Q$  des kleinen Quadrats zunächst der Flächeninhalt  $A_S$  eines Kreissektors subtrahiert.

Man erhält den Flächeninhalt  $A_R$  einer der Restflächen.

Subtrahiert man das Doppelte dieses Wertes von  $A_Q$ , so erhält man den Flächeninhalt  $A_1$  der gerasterten Fläche in einem kleinen Quadrat.

Das Vierfache der Fläche  $A_1$  ergibt nun die gesamte gerasterte Fläche  $A$ .

Für  $a = 12 \text{ cm}$  erhält man einen Flächeninhalt von  $82,19 \text{ cm}^2$ .



$$A_Q = \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$A_S = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{a^2}{16} \cdot \pi$$

$$A_R = A_Q - A_S = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} \cdot \pi$$

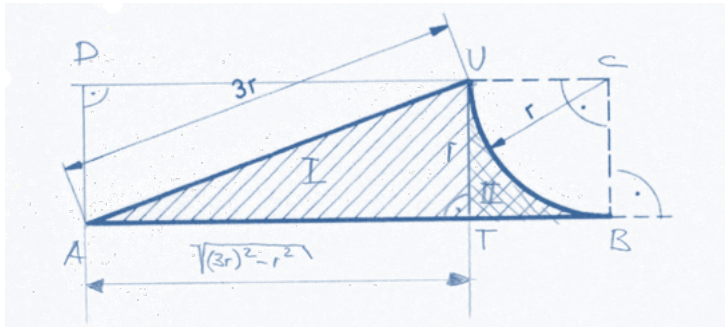
$$A_1 = A_Q - 2 \cdot A_R$$

$$A_1 = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \left( \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} \cdot \pi \right)$$

$$A_1 = \frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{8} \cdot \pi = -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} \cdot \pi$$

$$A = 4 \cdot A_1 = -a^2 + \frac{1}{2} a^2 \cdot \pi$$

### A 30.7



$$\overline{AT} = \sqrt{9r^2 - r^2} = \sqrt{8r^2} = \sqrt{8} \cdot r$$

$$\text{I) } A_{\triangle ATU} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot r \cdot r = \frac{1}{2} \sqrt{8} \cdot r^2 = \sqrt{2} \cdot r^2$$

(  $\sqrt{8}$  vereinfacht sich zu  $\sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot 2$  )

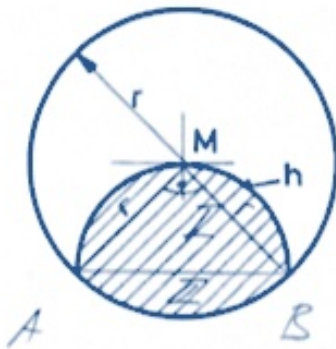
II) Restfläche II: quadrat  $\overline{TBCU}$  minus Viertelkreis:

$$A_{\text{II}} = r^2 - \frac{r^2 \pi}{4}$$

$$A_{\text{Total}} = \sqrt{2}r^2 + r^2 - \frac{r^2 \pi}{4} = r^2 \cdot \left( \sqrt{2} + 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$



# A 30.8



Schraffierte Fläche besteht aus Halbkreis (I) und Kreissegment über Bogen  $\widehat{AB}$  (II).

I)  $\rightarrow$  Durchmesser Halbkreis ist  $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \sqrt{2} \cdot r$$

$$A_I = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_I = \left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{2r^2 \cdot \pi}{4 \cdot 2} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

II) Kreissegment: (über  $\widehat{AB}$ )

$$A_{II} = \text{Kreis Sektor} - \triangle ABM$$

$$A_{II} = \frac{r^2 \pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2}{2}$$

(Interessant!  
 $\rightarrow$  Halbkreis gleiche Fläche wie Kreis Sektor)

$$A_{II} = \frac{r^2 \pi}{4} - \frac{2r^2}{4} = \frac{r^2 \pi - 2r^2}{4}$$

$$A_{\text{gesamt}} = A_I + A_{II} = \frac{r^2 \pi}{4} + \frac{r^2 \pi}{4} - \frac{2r^2}{4} = \frac{2r^2 \pi - 2r^2}{4} = \frac{r^2 (\pi - 1)}{2}$$

## 31 Kreise

### 31.1 Streckenberechnungen am Kreis

#### A 31.1

Wir zeichnen den Durchmesser  $\overline{AB}$ , der senkrecht auf der Sehne steht ( $\overline{AB} = 2r = 100 \text{ cm}$ ). Darüber errichten wir das rechtwinklige Dreieck  $ABC$ , dessen Höhe  $h$  auf der Sehne liegt (der gegebene Kreis spielt die Rolle des Thaleskreises über  $AB$ ).

Die Hypotenusenabschnitte sind:

$$p = d = 10 \text{ cm}$$

$$q = 2r - d = 100 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 90 \text{ cm}.$$

Die gesuchte Sehne  $s$  ist die doppelte Höhe  $h$ , die mit Hilfe des Höhensatzes berechnet werden kann:

Aus  $h^2 = 900 \text{ cm}^2$  folgt:

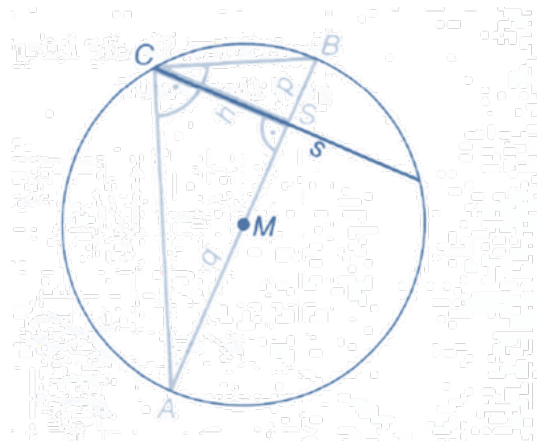
$$h^2 = pq = 10 \text{ cm} \cdot 90 \text{ cm} = 900 \text{ cm}^2.$$

Daraus ergibt sich wegen  $s = 2h$ :

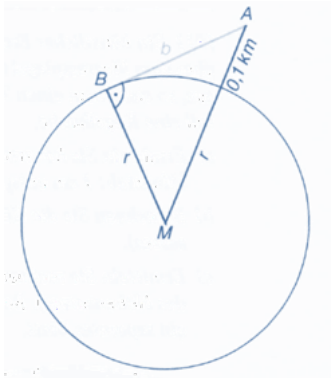
$$h = 30 \text{ cm}.$$

$$s = 60 \text{ cm}.$$

Alternativlösung: Man könnte  $h$  auch im rechtwinkligen Dreieck  $MSC$  mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen.



## A 31.2



Die gesuchte Blickweite  $b$  ist die andere Kathete. Somit gilt aufgrund des Satzes von Pythagoras:

$$b^2 = (6370,1 \text{ km})^2 - (6370 \text{ km})^2$$

$$= (6370,1 \text{ km} - 6370 \text{ km})(6370,1 \text{ km} + 6370 \text{ km}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Umformung aufgrund von} \\ a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \\ \text{ermöglicht Kopfrechnen!} \end{array} \right\}$$

$$= 0,1 \text{ km} \cdot 12740,1 \text{ km}$$

$$= 1274,01 \text{ km}^2$$

Aus  $b^2 = 1274,01 \text{ km}^2$  folgt  $b = \sqrt{1274,01} \text{ km}$  und mit Taschenrechner:

$$b = 35,7 \text{ km.}$$

## 31.2 Begriffe zum Kreis

---

-

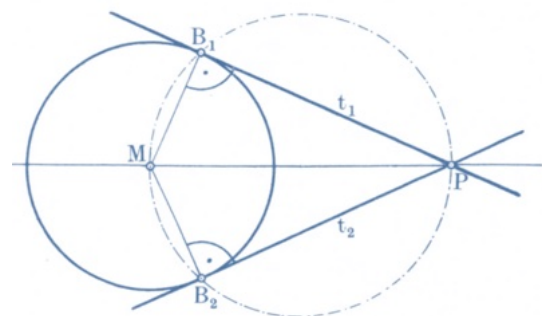
## 31.3 Tangenten an einen Kreis

---

## A 31.3

1. P mit M verbinden.
2. Thaleskreis über MP ergibt im Schnitt mit dem Kreis die beiden Berührungspunkte ( $B_1$  und  $B_2$ ).

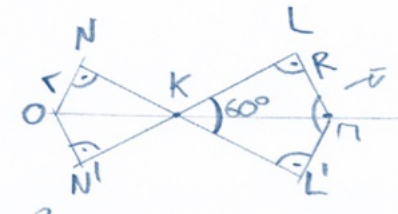
Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke  $PMB_1$  und  $PMB_2$  lassen sich für die Tangenten noch folgende zwei Sätze ableiten:



**1. Satz:** Die Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang.

**2. Satz:** Die Zentrale (Sekante von P aus durch das Zentrum des Kreises) halbiert den Winkel zweier Tangenten an den Kreis.

# A 31.4



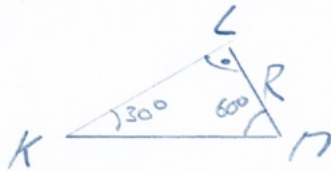
Kreisbogen:  $240^\circ$

$$\frac{240^\circ \pi}{360^\circ} = \frac{4}{3} r \pi$$

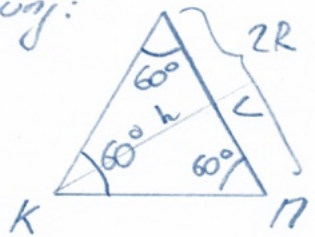
$$\text{Bogenlänge } b_2 = \frac{2R \cdot 240^\circ \pi}{360^\circ}$$

$$b_2 = \frac{4}{3} R \pi$$

Ansicht des  $\Delta$ -S  $\Delta KML$ :



ergänzung:



$\overline{KL}$  (Riemenlänge)  
ist Höhe in gleichseitigem  $\Delta$ !

$$h = \overline{KL} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R = \underline{\underline{\sqrt{3} \cdot R}}$$

abgele. Überlegung  $\Delta KNO$ .

Total gestreckte Riemenlänge:  $\overline{NK} + \overline{N'K} + \overline{KL} + \overline{KL'}$

$$= \sqrt{3}r \cdot 2 + \sqrt{3}R \cdot 2 = \underline{\underline{2\sqrt{3}(R+r)}}$$

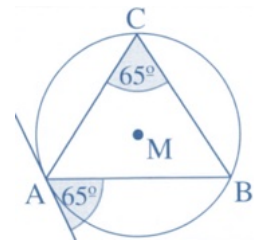
gesamte Riemenlänge:

$$\frac{4}{3} \pi (R+r) + 2\sqrt{3}(R+r) = \underline{\underline{(R+r) \left( \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)}}$$

## 31.4 Winkel im Kreis

### A 31.5

Aus der Planfigur entnimmt man: Man kann AB sofort zeichnen und an AB in A den Winkel von  $65^\circ$  antragen. Der freie Schenkel dieses Winkels ist Tangente an den gesuchten Kreis. Dessen Mittelpunkt liegt einerseits auf der Mittelsenkrechten zu AB, andererseits auf der Senkrechten zu der Tangente durch A.



### A 31.6

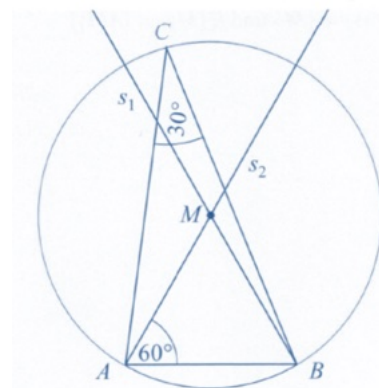
Die gesuchte Linie ist der (grüne) Ortskreis für die Winkel von  $30^\circ$ .

$$\text{Winkel } MAB = \text{Winkel } MBA = 60^\circ$$

$$|\overline{AB}| = 2,25 \text{ cm}$$

$$60^\circ \text{ an } \overline{AB} \rightarrow s_1, 60^\circ \text{ an } \overline{BA} \rightarrow s_2$$

$$s_1 \cap s_2 = \{M\} \text{ und } K(M; r = |\overline{AM}|)$$

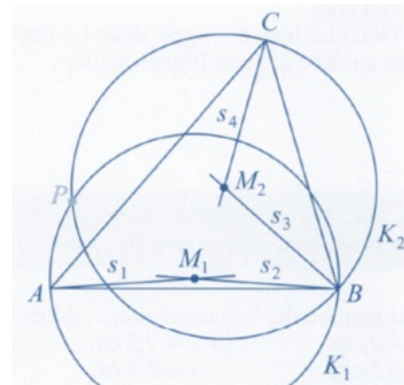


### A 31.7

Die gesuchte Position befindet sich auf einem Kreis, auf dem alle Orte liegen, von denen aus die Strecke „Tempel - Haus“ unter dem Winkel  $\alpha$  erscheint (Fasskreis). Dieser Kreis lässt sich mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes konstruieren. Ebenso liegt die eigene Position auf dem Kreis für die Orte, von denen aus der Abstand „Haus - Fabrik“ unter dem Winkel  $\beta$  erscheint. Es gibt allerdings jeweils zwei solcher Kreise, im Bild sind nur die relevanten mit der korrekten Orientierung für die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  eingetragen. Die gesuchte Position liegt auf demjenigen Schnittpunkt derjenigen dieser Kreise, von dem aus die Geländepunkte in der „richtigen Reihenfolge“ erscheinen, also das Haus rechts vom Tempel zu sehen ist.

### A 31.8

Es sind die Ortskreise zu AB für einen Peripheriewinkel von  $86^\circ$  und für BC für einen Peripheriewinkel von  $58^\circ$  zu konstruieren. Es wird 1 cm für 10000 cm gezeichnet, d. h., für 100 m in der Natur steht 1 cm in der Zeichnung. Zunächst wird das Dreieck ABC mit den Seitenlängen C: 7 cm, A: 6,3 cm und B: 8 cm nach SSS konstruiert. Sodann erfolgt die Konstruktion der Ortskreise.



$$\text{Winkel } M_1AB = \text{Winkel } M_1BA$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - 172^\circ) = 4^\circ$$

$$4^\circ \text{ an } \overline{AB} \rightarrow s_1$$

$$4^\circ \text{ an } \overline{BA} \rightarrow s_2$$

$$s_1 \cap s_2 = M_1$$

$$K_1(M_1; r = |\overline{AM_1}|)$$

$$\text{Winkel } M_2CB = \text{Winkel } M_2BC$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - 116^\circ) = 32^\circ$$

$$32^\circ \text{ an } \overline{BC} \rightarrow s_3$$

$$32^\circ \text{ an } \overline{CB} \rightarrow s_4$$

$$s_3 \cap s_4 = M_2$$

$$K_2(M_2; r = |\overline{CM_2}|)$$

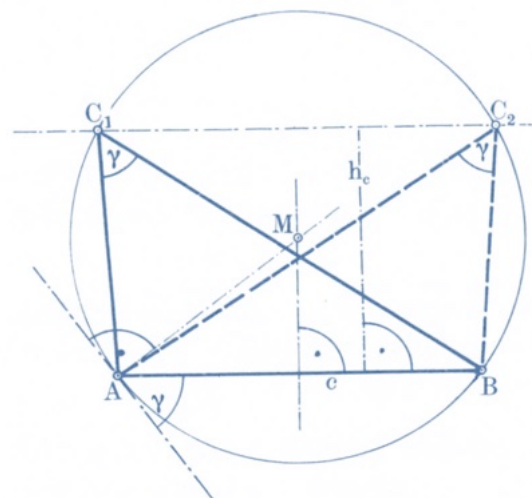
$$K_1 \cap K_2 = \{B, P\}$$

### A 31.9

a)  $36^\circ$  b)  $53^\circ$

### A 31.10

1. Seite c
2. Parallelstreifen, Breite  $h_c$
3. Nun muss folgende Aufgabe gelöst werden:  
Konstruieren Sie den Bogen über einer Sehne (= Seite c) mit  $\gamma : 50^\circ$  als Peripheriewinkel. Diese Konstruktion führen wir mit Hilfe eines Sehnentangentenwinkels aus.



## 32 Ähnlichkeit am Kreis

---

### 32.1 Der Sehnensatz

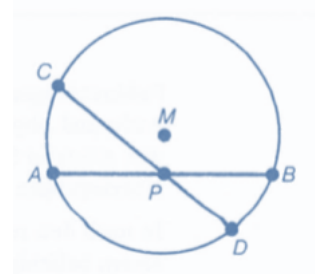
---

Nach einigen Versuchen haben Sie wahrscheinlich festgestellt, dass das Produkt für alle Sehnen gleich ist:

#### **Sehnensatz**

Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, dann ist das Produkt der beiden Abschnitte einer Sehne gleich dem entsprechenden Produkt für die andere Sehne:

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}.$$

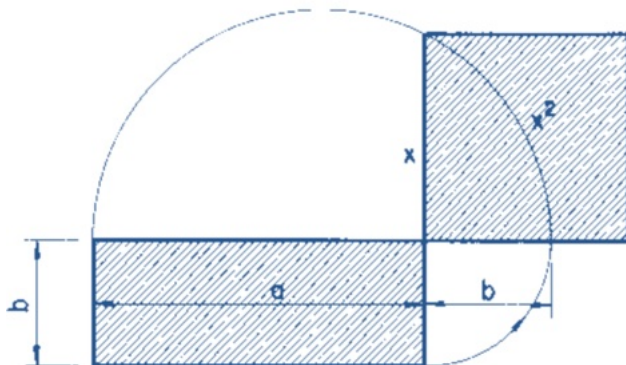


### 32.2 Der Sekantensatz

---

#### **A 32.1**

Prinzip: Der Durchmesser des Kreises ist  $d = a + b$ . Dieser Durchmesser kann als Sehne betrachtet werden. Die zweite Sehne im Kreis ist  $2x$  lang.



## 33 Würfel, Quader, Prisma und Pyramide

---

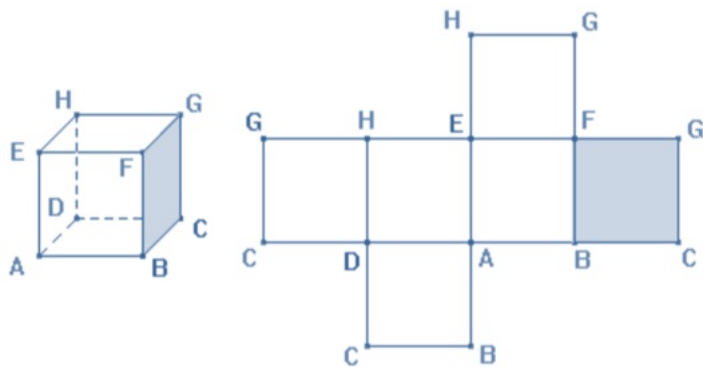
### 33.1 Würfel

---

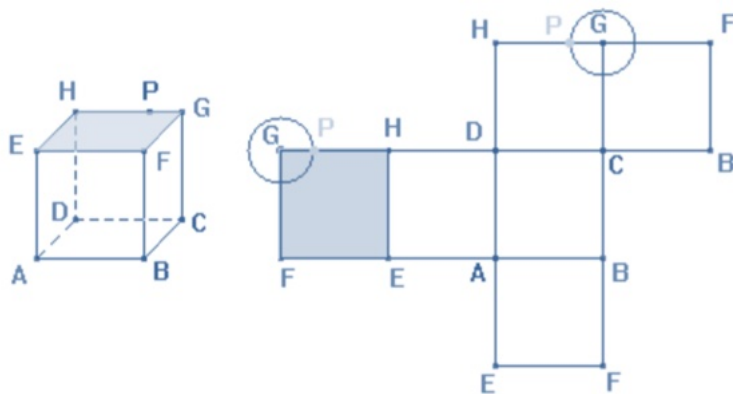


### A 33.1

a)

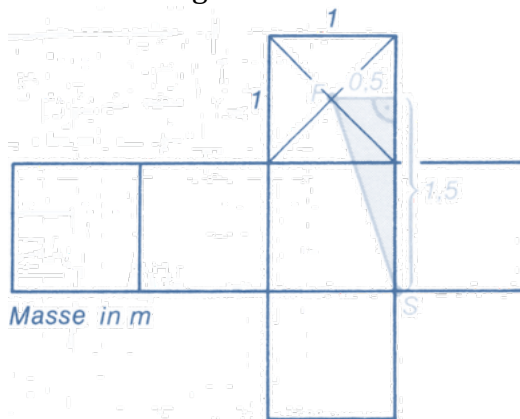


b)



### A 33.2

Kürzester Weg: 1.58 Meter.



### 33.2 Quader

### A 33.3

Für die gegebenen Abmessungen ergibt sich:



$$\overline{AG} = \sqrt{(1,3\text{m})^2 + (1,8\text{m})^2 + (2,1\text{m})^2} = 3,06\text{m}$$

### 33.3 Prisma

---

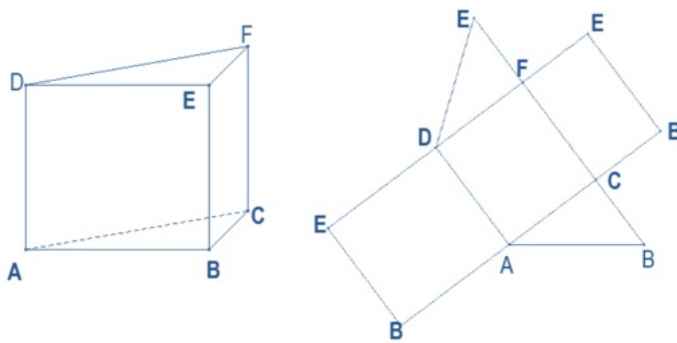
#### A 33.4

Ein n-seitiges Prisma hat  $3n$  Kanten (je  $n$  Kanten in Grund- und Deckfläche und dazu  $n$  Seitenkanten). Die Zahl der Kanten ist deshalb immer durch 3 teilbar: Somit kommt 14 als Kantenzahl nicht in Frage.

#### A 33.5

Ein n-seitiges Prisma hat  $2n$  Ecken (je  $n$  Ecken in Grund- und Deckfläche). Die Zahl der Ecken ist also gerade und 13 kommt deshalb als Eckenzahl nicht in Frage.

#### A 33.6



#### Merken wir uns:

Das Netz eines Prismas setzt sich zusammen aus dem Mantel und den daran angehefteten kongruenten Grund- und Deckflächen. Der Mantel ist ein Rechteck, dessen Höhe gleich der Prismahöhe und dessen Länge gleich dem Grundflächenumfang ist.

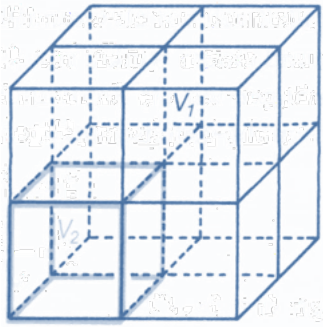
## 34 Volumen des Quaders, Prismas und der Pyramide

---

### 34.1 Quader

---

#### A 34.1



$$V_2 = 5.25 \text{ dm}^3$$

## 34.2 Prisma

### A 34.2

Grundfläche G : Wir berechnen G als

- Inhalt  $G_1$  eines Trapezes mit den Grundlinien 48 cm und 60 cm sowie der Höhe 26 cm :

$$G_1 = \frac{1}{2} \cdot (48 \text{ cm} + 60 \text{ cm}) \cdot 26 \text{ cm} = 1404 \text{ cm}^2,$$

- plus den Inhalt  $G_2$  eines Dreiecks, von dem die eine Seite 48 cm und die zugehörige Höhe 12 cm mißt:

$$G_2 = \frac{1}{2} \cdot 48 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 288 \text{ cm}^2.$$

Somit gilt:

$$G = G_1 + G_2 = 1404 \text{ cm}^2 + 288 \text{ cm}^2 = 1692 \text{ cm}^2.$$

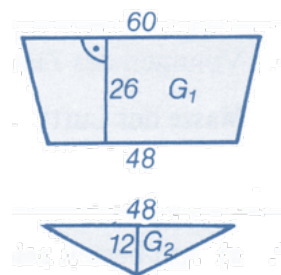
Das Volumen des Trogs beträgt also:

$$V = G \cdot h = 1692 \text{ cm}^2 \cdot 200 \text{ cm} = 338400 \text{ cm}^3$$

$$V = 338,4 \text{ dm}^3 = 338,4 \ell$$

Umrechnung in Liter:

$$V = 338,4 \text{ dm}^3 = \mathbf{338,4 \ell}$$

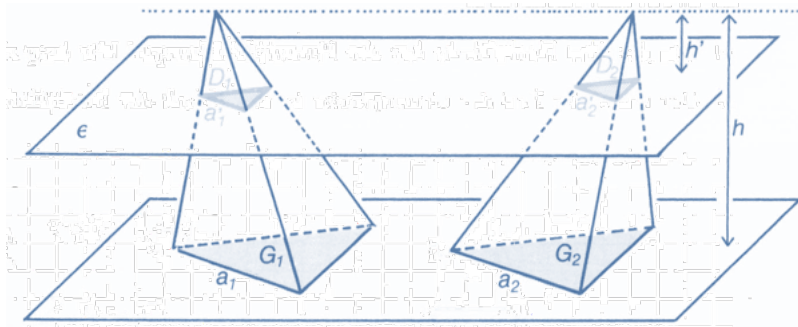


## 34.3 Das schiefe Prisma

....

## 34.4 Pyramide

### A 34.3



Nach unserer vorigen Überlegung sind die Schnittfiguren zu den Grundflächen ähnlich:

$$D_1 \cong G_1 \text{ und } D_2 \cong G_2.$$

Da  $G_1$  und  $G_2$  kongruent sind, sind auch  $D_1$  und  $D_2$  ähnlich:  $D_1 \sim D_2$ . Ferner gilt:

$$a'_1 = \frac{h'}{h} \cdot a_1 \text{ und } a'_2 = \frac{h'}{h} \cdot a_2.$$

Wegen  $a_1 = a_2$  folgt daraus:  $a'_1 = a'_2$ . Die beiden Dreiecke  $D_1$  und  $D_2$  sind also ähnlich und stimmen in zwei sich entsprechenden Seiten überein, sie sind deshalb kongruent:

$$D_1 \cong D_2$$

Das ist ein überraschendes Ergebnis, denn anschaulich gesprochen bedeutet es doch folgendes: Wenn wir uns die linke Pyramide als Papierstapel vorstellen, so können wir durch geeignetes 'Verschieben' des Stapels erreichen, daß die Pyramide kongruent zur rechten Pyramide wird, ganz egal, wie schief diese auch immer ist.

#### A 34.4

$$h^2 = 5^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3\right)^2 \Rightarrow h = 4.53 \text{ cm}$$

#### A 34.5

$$O = 128 \text{ cm}^2; V = 85 \frac{1}{3} \text{ cm}^3$$

#### A 34.6

Fläche ACS: :  $24.749 \text{ cm}^2$

Konstruktion ( Quadrat  $s = 5 \text{ cm}$ , Diagonale AC, in Mitte von AC Senkrechte von 7 cm ergibt S)

#### A 34.7\*

Dach:  $\frac{a^2}{3}(\sqrt{10} + 2 \cdot \sqrt{5})$

Volumen:  $\frac{7}{18}a^3$

## 35 Lösungen zu den Lernzielkontrollen

### A 1.1

a)  $l=45,10\text{m}$  b)  $l=21\text{m}, 45\text{m}$

Ihre Konstruktion ist gut genug, wenn die Werte maximal 5% von den obigen Resultaten abweichen.

### A 1.2

Man legt das Gerät zweimal an den Kreis an; der Mittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Geraden, die jeweils durch den mittleren Stab bestimmt sind.

### A 1.3

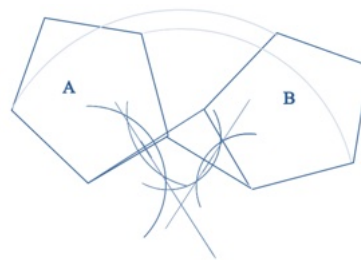
$$\angle BAD = 76^\circ$$

$$\angle ADC = 126^\circ$$

$$\angle DCB = 90^\circ 30'$$

$$\angle CBA = 63^\circ 30'$$

### A 1.4

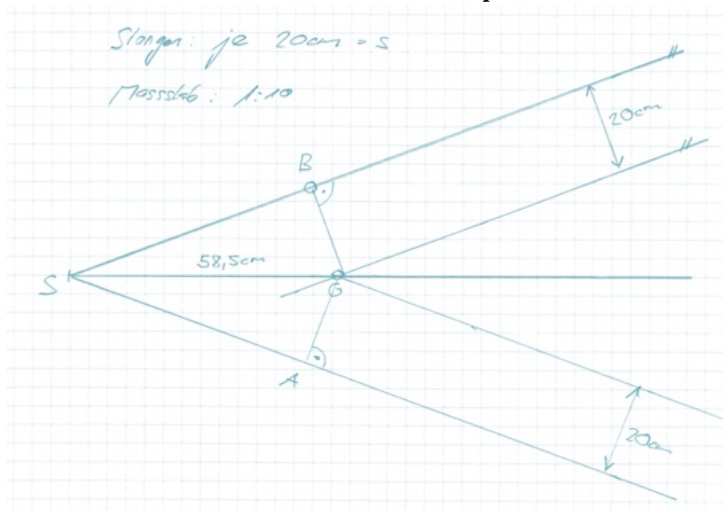


### A 1.5

Größtmögliche Entfernung:  $d(G; S) = \underline{58,5\text{cm}}$ .

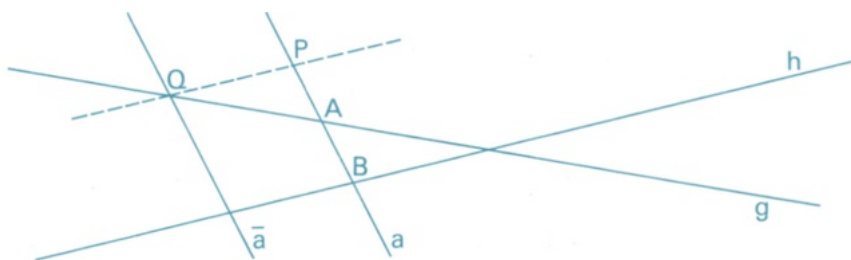
Der Punkt G erhält man konstruktiv aus dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der (oder den) parallelen Gerade(n) welche im Abstand 20 cm der Schenkel des Winkels liegen.

Siehe Bild. Das Lot von G auf B entspricht dem Abstand 20 cm.



### A 1.6

Es sei P der Punkt auf a, für den  $PB=3\text{cm}$  gilt und der von B in Richtung A liegt; Q sei der Schnittpunkt der Parallelen zu g durch P mit h. Das Bild von a bei der Verschiebung PQ ist die gesuchte Gerade.



## A 2.1

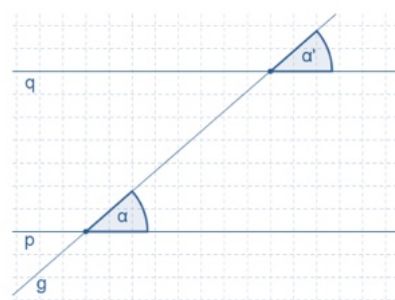
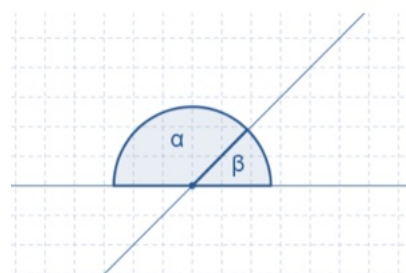
Nebenwinkel

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha$$

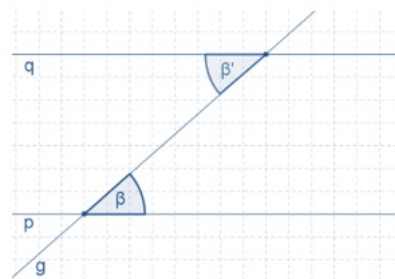
Die parallelen Geraden p und q werden von der Geraden g geschnitten.  
Die Winkelpaare  $\alpha$  und  $\alpha'$  heissen Stufenwinkel.

Stufenwinkel an Parallelen sind gleich gross:  $\alpha = \alpha'$ .

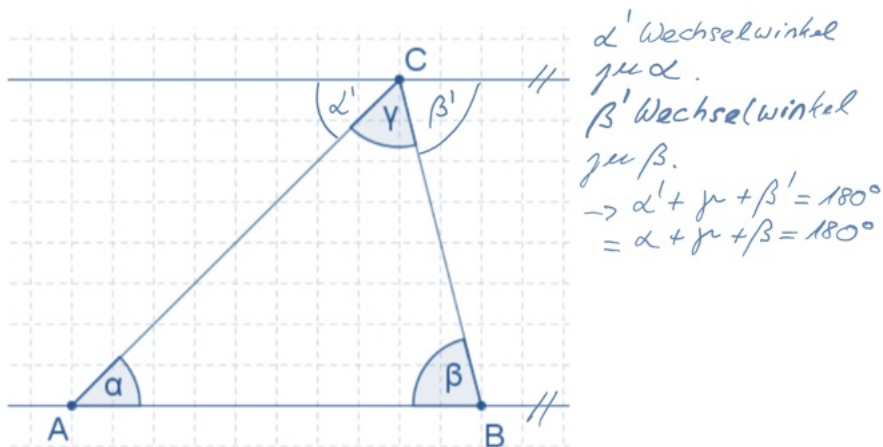


Die parallelen Geraden p und q werden von der Geraden g geschnitten.  
Die Winkelpaare  $\beta$  und  $\beta'$  heissen Wechselwinkel.

Wechselwinkel an Parallelen sind gleich gross:  $\beta = \beta'$ .

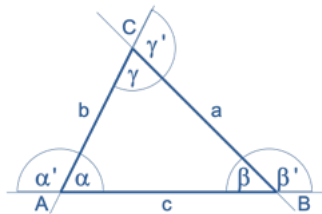


## A 2.2



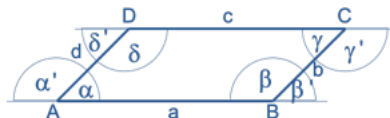
## A 2.3

### Dreieck



|           | 1.          | 2.          | 3.          | 4.          | 5.         | 6.          |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| $\alpha$  | $23^\circ$  | $16^\circ$  | $26^\circ$  | $56^\circ$  | $86^\circ$ | $56^\circ$  |
| $\beta$   | $88^\circ$  | $92^\circ$  | $122^\circ$ | $38^\circ$  | unmöglich  | $90^\circ$  |
| $\gamma$  | $69^\circ$  | $72^\circ$  | $32^\circ$  | $86^\circ$  | unmöglich  | $34^\circ$  |
| $\alpha'$ | $157^\circ$ | $164^\circ$ | $154^\circ$ | $124^\circ$ | unmöglich  | $124^\circ$ |
| $\beta'$  | $92^\circ$  | $88^\circ$  | $58^\circ$  | $142^\circ$ | $78^\circ$ | $90^\circ$  |
| $\gamma'$ | $111^\circ$ | $108^\circ$ | $148^\circ$ | $94^\circ$  | unmöglich  | $146^\circ$ |

### Romboid



|           | 1.          | 2.          | 3.          | 4.          | 5.          | 6.          |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\alpha$  | $45^\circ$  | $64^\circ$  | $68^\circ$  | $58^\circ$  | $36^\circ$  | $28^\circ$  |
| $\beta$   | $135^\circ$ | $116^\circ$ | $112^\circ$ | $122^\circ$ | $144^\circ$ | $152^\circ$ |
| $\gamma$  | $45^\circ$  | $64^\circ$  | $68^\circ$  | $58^\circ$  | $36^\circ$  | $28^\circ$  |
| $\delta$  | $135^\circ$ | $116^\circ$ | $112^\circ$ | $122^\circ$ | $144^\circ$ | $152^\circ$ |
| $\alpha'$ | $135^\circ$ | $116^\circ$ | $112^\circ$ | $122^\circ$ | $144^\circ$ | $152^\circ$ |
| $\beta'$  | $45^\circ$  | $64^\circ$  | $68^\circ$  | $58^\circ$  | $36^\circ$  | $28^\circ$  |
| $\gamma'$ | $135^\circ$ | $116^\circ$ | $112^\circ$ | $122^\circ$ | $144^\circ$ | $152^\circ$ |
| $\delta'$ | $45^\circ$  | $64^\circ$  | $68^\circ$  | $58^\circ$  | $36^\circ$  | $28^\circ$  |

## A 2.4

Individuelle Ansätze. Diskutieren Sie mit der Lehrperson ob Ihre Beweisführung stichhaltig ist!

## A 2.5

Die Winkel sind gleich gross. Die Figuren sind dennoch nicht ähnlich, da die Verhältnisse entsprechender Seiten unterschiedlich sind.

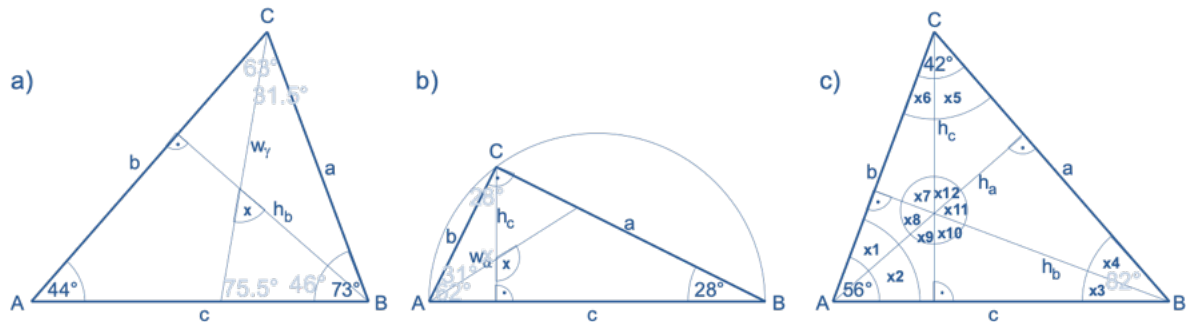
## A 2.6

| $\triangle ABC$ | $\triangle ADC$ | $\triangle DBC$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a               | $h_c$           | p               |
| b               | q               | $h_c$           |
| c               | b               | a               |

## A 2.7

- a)  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  sind Scheitelwinkel.  
b)  $\alpha$  und  $\gamma$  sind zur Sehne  $\overline{DB}$  Umfangswinkel.  
c) Zur Sehne  $\overline{AC}$  sind  $\beta$  und  $\delta$  Umfangswinkel.

## A 2.8

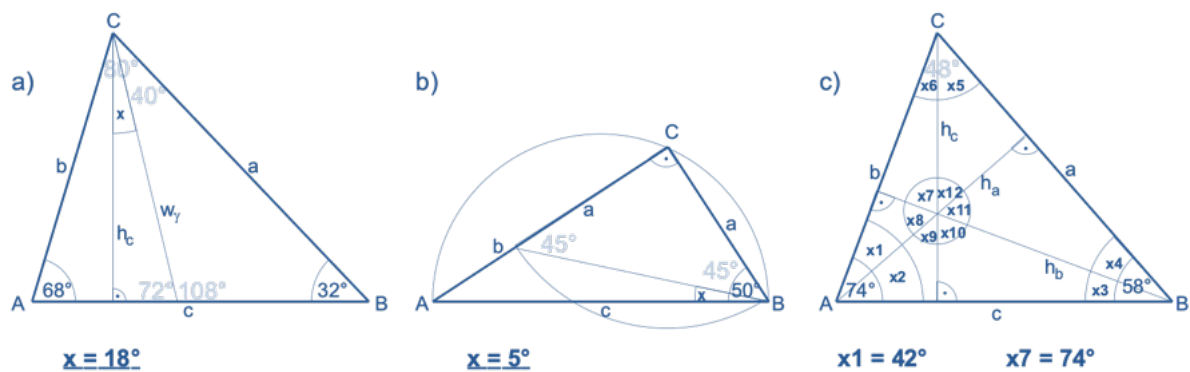


a)  $x = 58.5^\circ$

b)  $x = 121^\circ$

|                  |                     |
|------------------|---------------------|
| $x_1 = 48^\circ$ | $x_7 = 56^\circ$    |
| $x_2 = 8^\circ$  | $x_8 = 42^\circ$    |
| $x_3 = 34^\circ$ | $x_9 = 82^\circ$    |
| $x_4 = 48^\circ$ | $x_{10} = 56^\circ$ |
| $x_5 = 8^\circ$  | $x_{11} = 42^\circ$ |
| $x_6 = 34^\circ$ | $x_{12} = 82^\circ$ |

## A 2.9



$x = 18^\circ$

$x = 5^\circ$

|                  |                     |
|------------------|---------------------|
| $x_1 = 42^\circ$ | $x_7 = 74^\circ$    |
| $x_2 = 32^\circ$ | $x_8 = 48^\circ$    |
| $x_3 = 16^\circ$ | $x_9 = 58^\circ$    |
| $x_4 = 42^\circ$ | $x_{10} = 74^\circ$ |
| $x_5 = 32^\circ$ | $x_{11} = 48^\circ$ |
| $x_6 = 16^\circ$ | $x_{12} = 58^\circ$ |



### A 2.10

$x=3.43\text{cm}$  Falls Sie nicht auf diese Lösung kommen, ein Tipp: die Strecke CF ist  $x$  lang.

### A 2.11

$x = 6\text{cm}$

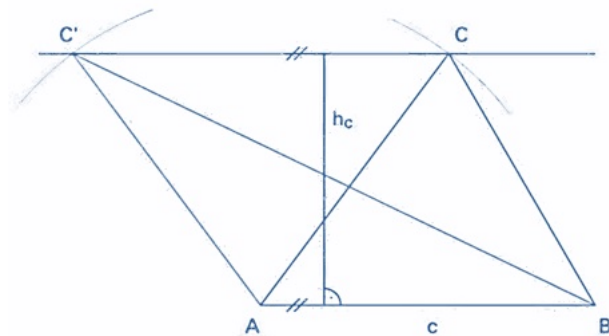
### A 2.12

a)  $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{x+11} = \frac{18}{45}$ , also  
 $x \approx 7,33\text{m}$

b)  $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{x+12} = \frac{33,5}{40}$ , also  
 $x \approx 61,85\text{m}$

c)  $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{47} = \frac{75}{50}$ , also  $x = 70,5\text{m}$

### A 2.13



### A 3.1

Gegeben:  $a=6.6\text{ cm}$ ,  $b=4.8\text{ cm}$ ,  $h_a=3.2\text{ cm}$

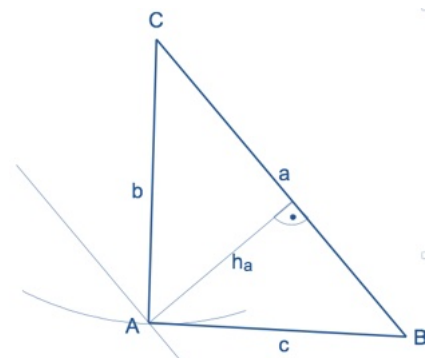
1)  $a = 6.6\text{cm} = \overline{BC}$

2)  $//$  zu  $a$  im Abstand  $h_a = 3.2\text{cm}$

3) Kreis um  $C$  mit  $r_b = 4.8\text{cm}$  geschnitten  
mit Parallelen  $\rightarrow A$

4) Dreieck  $= ABC$

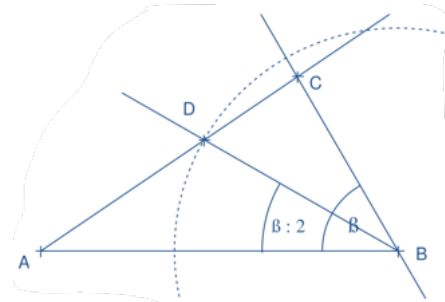
Gezeichnet ist die erste der zwei Lösungen!



### A 3.2

Gegeben:  $c=8.0\text{cm}$ ,  $w_b=5.0\text{cm}$ ,  $b=60^\circ$

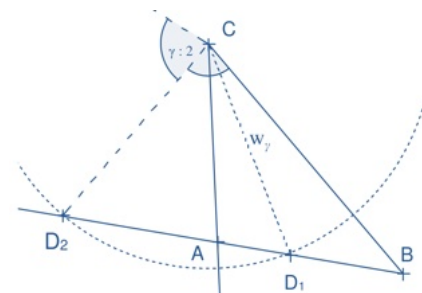
- 1)  $c=8.0\text{ cm} = \overline{AB}$
- 2)  $b=60^\circ$  bei B
- 3) Winkelhalbierende von b
- 4) D liegt auf der Winkelhalbierenden von b und auf dem Kreis  $k(B; w_b=5.0\text{cm})$



### A 3.3

Gegeben:  $a=6.0\text{cm}$ ;  $w_\gamma=4.5\text{cm}$ ;  $\beta=40^\circ$

- 1)  $a=\overline{BC}=6.0\text{cm}$
- 2)  $\beta$  an  $\overline{BC}$  bei B
- 3)  $D_1$  liegt auf dem Kreis  $k(C; w_\gamma)$  und dem freien Schenkel von  $\beta$ . ( $D_2$  führt zu keinem Dreieck).
- 4) Übertrage  $\gamma:2$  an  $\overline{CD}$
- 5) A liegt auf dem freien Schenkel von  $\gamma:2$  aus (4) und auf der Halbgeraden  $\overline{BD}$ .



### A 3.4

Ein Trapez ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten.  
Nur Aussage Nr. 2 ist korrekt.

### A 3.5

Im Parallelogramm ergänzen sich Winkel  $\alpha$  und  $\delta$  zu  $180^\circ$ .  
Nur Aussage Nr. 2 ist korrekt.

### A 3.6

Die Diagonalen halbieren einander und stehen senkrecht aufeinander.  
Nur Aussage Nr. 1 ist korrekt.

### A 3.7

Ein anderer Begriff für Raute.

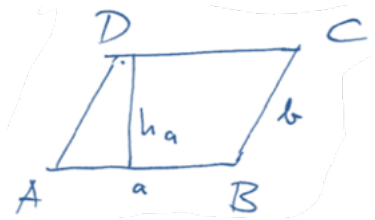
### A 3.9

### A 3.8

$\alpha = 85^\circ$ ,  $\beta = 65^\circ$ ,  $\gamma = 115^\circ$  und  $\delta = 95^\circ$

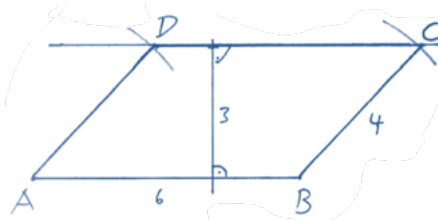
Konstruieren Sie ein Parallelogramm aus  $a = 6\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$  und  $h_a = 3\text{cm}$ .

Skizze:



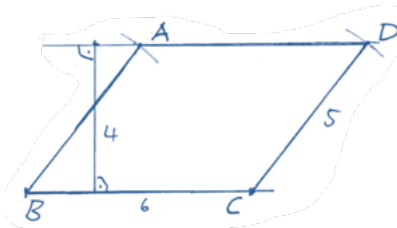
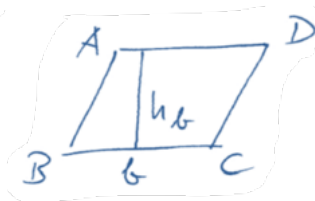
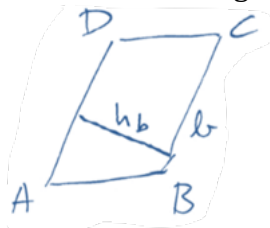
**A 3.10**

Konstruktion:



Konstruieren Sie ein Parallelogramm aus  $a=5\text{cm}$ ,  $b=6\text{cm}$  und  $h_b=4\text{cm}$ .

Skizze in Normlage, dann eventuell drehen: Konstruktion



**A 3.11**

Fläche  $A=2100$   $x+y+z=240$

**A 3.13**

$$x = \sqrt{10} \cdot a \approx 3,16a$$

**A 3.12**

$x = 28\text{cm}$

**A 3.14**

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4} \cdot s^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot s^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$$

$$s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot h$$

**A.3.15**

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \rightarrow D = \sqrt{3} \cdot a$$

Die Formel für die Raumdiagonale im Würfel ist also korrekt.

**A 4.2**

$A=45\text{mm}^2$

**A 4.4**

**A 4.1**

$A=544\text{dm}^2$

**A 4.3**

$a=299\text{cm}$

Mögliches Vorgehen:

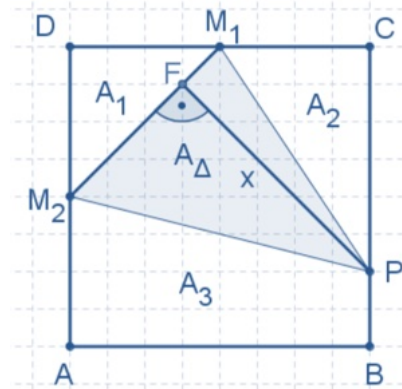
$x$  als Höhe des Dreiecks  $\triangle PM_1M_2$  berechnen.

$$A_{\Delta} = A_{\text{Quadrat}} - A_1 - A_2 - A_3$$

$$= 16 - 2 - 3 - 6 = 5$$

$M_1M_2 = 2 \cdot \sqrt{2}$  (Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge 2)

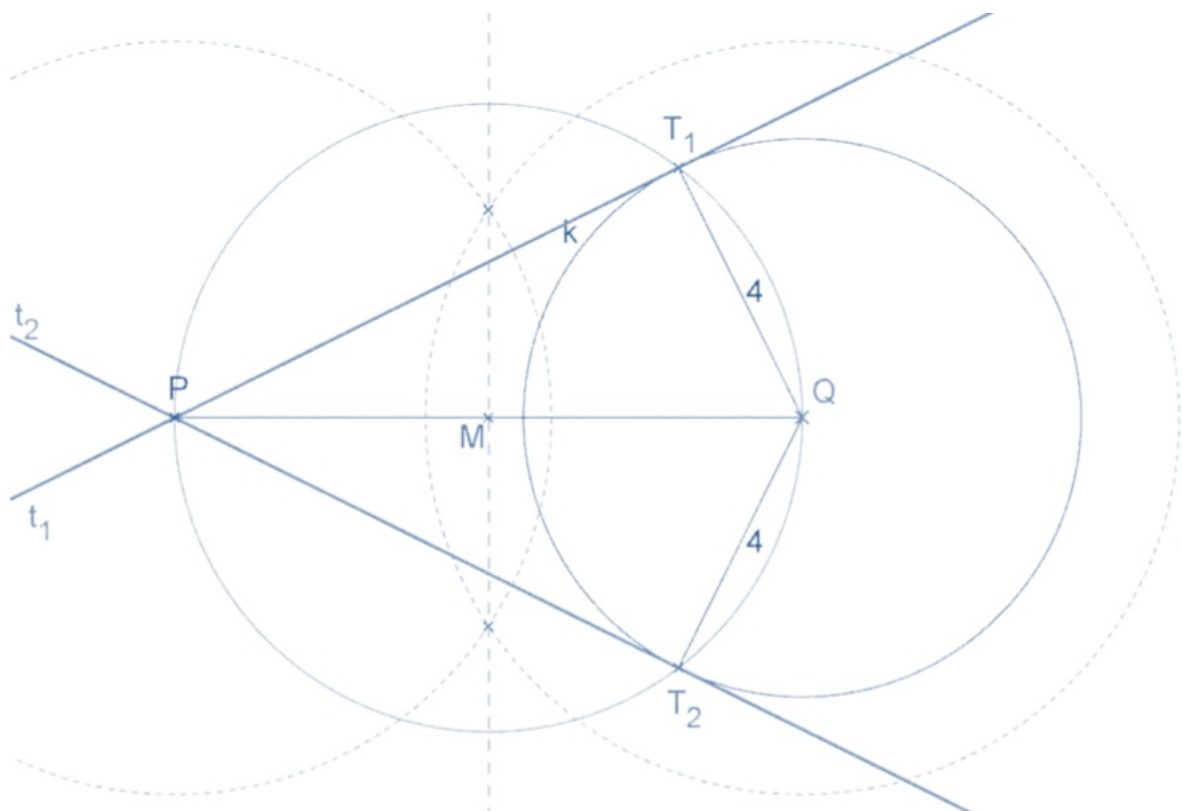
$$x = \frac{2 \cdot A_{\Delta}}{M_1M_2} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3,54$$



## A 4.5

Konstruktion:

1. Kreis  $k(Q; 4\text{cm})$
2. Tangenten durch P an Q (mit Thaleskreis)  $\rightarrow t_1$  und  $t_2$



## A 4.6

Die beiden Pizzen würden 10.67 Fr. und 24 Fr. kosten.

## A 4.8

31.4 Einheiten

## A 4.10

## A 4.7

Das Übersetzungsverhältnis ist 1:7 und die Riemenlänge ist 32.9 Einheiten.

## A 4.9

7.65 Einheiten

## A 4.11

36°

Die Fläche A als Ausdruck von r ist:

$$A(r) = \frac{1}{16} \pi r^2$$

#### A 4.12

75°

#### A 4.14

1. p//c im Abstand  $h_c$
2.  $p \cap$  Ortsbogen für  $\gamma$  über  $c = \{C_1, C_2$   
 $a_1 = 6,9\text{cm}$ ,  $a_2 = 4,8\text{cm}$

#### A 4.13

67.5°

#### A 4.15

Der Durchmesser sei  $d = x + 20\text{cm}$

Nach dem Sehnensatz gilt:

$$20\text{cm} \cdot x = 37\text{cm} \cdot 37\text{cm} \Rightarrow x = 68,45\text{cm}$$

Die Schale hat einen Durchmesser von 88,45cm

#### A 4.16

Die Entleerung würde 73 Tage (72.66 Tage) dauern.

#### A 4.17

Im ungünstigsten Fall ergibt sich das minimale / maximale Volumen wie folgt:

$$V_{\min} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2.2^2 \cdot \pi \cdot 4.8\text{cm}^3 = 72.99\text{cm}^3 = 73\text{cm}^3$$

$$V_{\max} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2.6^2 \cdot \pi \cdot 5.2\text{cm}^3 = 110.43\text{cm}^3 = 110\text{cm}^3$$

$$V_{\text{mittel}} = 2.4^2 \cdot \pi \cdot 5\text{cm}^3 = 90.48\text{cm}^3 = 90\text{cm}^3$$

$\Rightarrow$  der Wert für das Volumen kann zwischen 73cm und 110 liegen (Differenz  $37\text{cm}^3$ ).

$\Rightarrow$  das Volumen des Zylinders beträgt somit  $V = 90\text{cm}^3 \pm 18.5\text{cm}^3$ .

Die absolute Messunsicherheit von  $18.5\text{cm}^3$  hat also einen Anteil von 20.56% an den  $90\text{cm}^3$ .

#### A 4.18

$$V_{\text{leitung}} = A_{\text{Grundfläche}} \cdot h$$

$$V_{\text{Leitung}} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{leitung}} = (0.4\text{dm})^2 \cdot \pi \cdot 100'000\text{dm}$$

$$V_{\text{leitung}} = 16'000\pi$$

$$V_{\text{Leitung}} = 50265.48\text{dm}^3$$

$$\text{Masse} = \text{Dichte} \cdot \text{Volumen}$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = 2.58 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 50265.48\text{dm}^3$$

$$m = 129'685\text{kg}$$

$$\underline{\underline{m = 129.685\text{t}}}$$

#### A 4.19

$r=8\text{cm}$ ,  $h=15\text{cm}$ ,  $s=17\text{cm}$ , Mantelfläche  $M = 427.26 \text{ cm}^2$ , Oberfläche O total:  $O = 628.32\text{cm}^2$ ,  $V = 1005.31\text{cm}^3$ .

#### A 4.20

$$V = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3,5 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3,5 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 3,5 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 6 \cdot 8 \cdot 3,5 = \frac{2}{3} \cdot 168 = \underline{\underline{112 \text{ m}^3}}$$

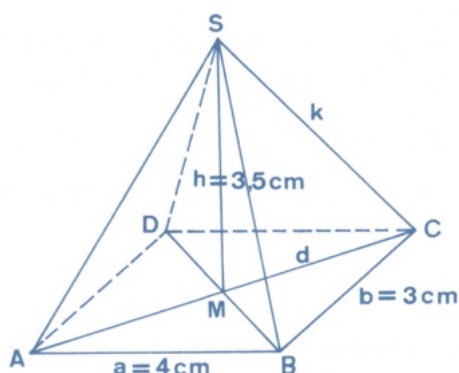
#### A 4.21

$\triangle ABC$  ist rechtwinklig ;  $a, b$  sind Katheten.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = 5 \text{ cm}$$

$\triangle SMC$  ist rechtwinklig ;  $h, \frac{d}{2}$  sind Katheten,  $k$  ist Hypotenuse.

$$k = \sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2}; \quad k = \sqrt{\frac{25}{4} \text{ cm}^2 + 12,25 \text{ cm}^2} \approx \underline{\underline{4,3 \text{ cm}}}$$



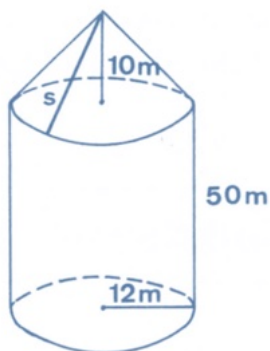
#### A 4.22

$$\text{a) } s = \sqrt{(10 \text{ m})^2 + (12 \text{ m})^2}; \quad \underline{s \approx 15,6 \text{ m}} \quad \text{b) } M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot 12 \text{ m} \cdot 15,6 \text{ m} = \underline{\underline{587,8 \text{ m}^2}}$$

$$\text{c) } V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot 144 \text{ m}^2 \cdot 50 \text{ m} = \underline{\underline{22608 \text{ m}^3}}$$

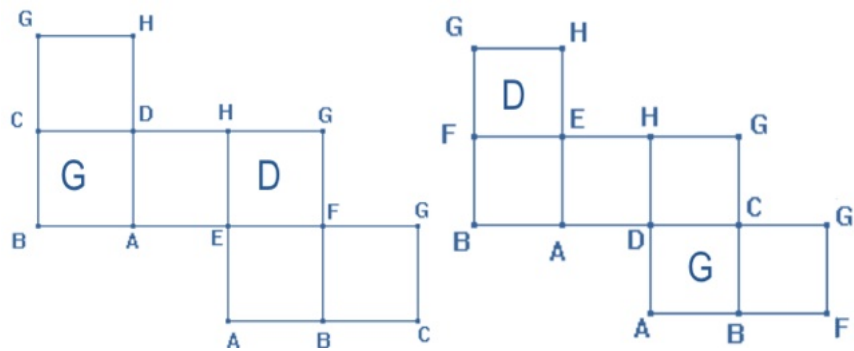
$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 144 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ m} = \underline{\underline{1507,2 \text{ m}^3}}$$

Das Gesamtvolumen beträgt 24115,2 m<sup>3</sup>



## A 4.23

a)



b)

