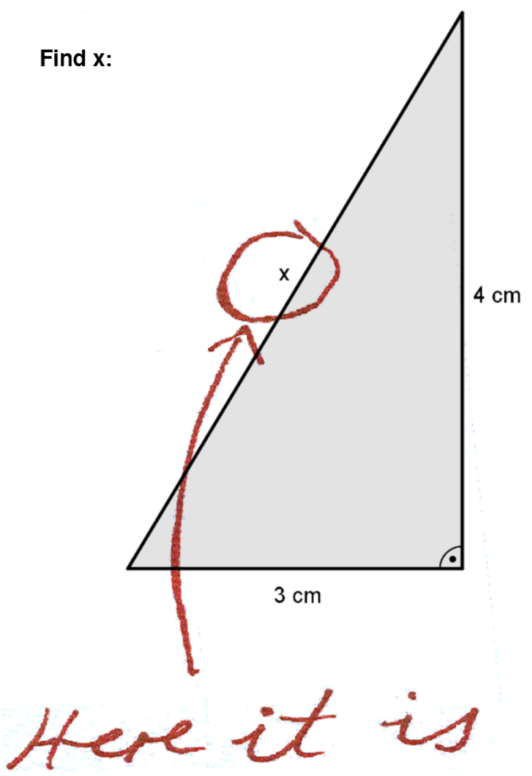
Mathematatik

Erweiterte Allgemeinbildung

Vorbereitung auf die Berufsmaturität II

LÖSUNGEN



Passend zur Auflage – 2025

Lösungen

Funktionen I 6
Proportion 6
Antiproportion 7

Sachrechnen mit Proportionen und Antiproportionen 9
Sachrechnen mit Proportionen und Antiproportionen 9

Rechnen mit Anteilen 10
Rechnen mit Anteilen 10

Prozent- und Promillerechnung 11
Prozent- und Promillerechnung 11
Steigung und Gefälle 11
Brutto, Netto, Tara 11
Skonto und Rabatt 11
Bankenwesen - Vermischtes 11
Zinseszinsrechnung 11

Teilungsrechnung / Finnazbeteiligung 12
Finanzbeteiligung 12

Primzahlen 13
kgV und ggT - Anwendungen 13
Teilbarkeitsregeln, kgV und ggT und die Primfaktorzerlegung 13

Grundlagen der Algebra 14
Terme ausrechnen 14
Rechenbäume 14
Vorzeichen bei Strichoperationen 14
Klammern bei Summen und Differenzen 14
Terme mit Summen und Differenzen aufstellen 14
Multiplikation (Vorzeichen bei Punktoperationen) 16
Produkte zu Summen ausmultiplizieren 16
Terme mit Produkten finden 16
Aus Summen Produkte bilden 16
Terme mit Produkten und Quotienten aufstellen 16

Lineare (Un-)Gleichungen mit einer Variablen 17
Lineare Gleichungen ohne Parameter mit 1 Lösungsvariablen 17

Textaufgaben zu linearen Gleichungen 17
Lineare Gleichungen: Textaufgaben 17

Gleichungen zweiten Grades 18
Quadratische Gleichungen vom Typ «Produkt = 0» 18
Quadratische Gleichungen vom Typ «x^2=a» 18
Numerische quadratische Gleichungen 18
Textaufgaben die auf quadratische Gleichungen führen 18

Bruchrechnen 19
Addieren und Subtrahieren von Brüchen 19
Kürzen von Brüchen 19
Multiplizieren von Brüchen 19
Dividieren von Brüchen 19
Die vier Grundoperationen mit Brüchen 20

Bruchgleichungen 21

Lineare Gleichungen mit Variablen im Nenner *21*
Bruchgleichungen (und Terme) aufstellen *21*

Lineare Gleichungen mit Formvariablen **22**
Formeln umstellen *22*
Lineare Gleichungen mit Formvariablen *22*

Diskussion der Lösungsmenge **23**
Lineare Gleichungen mit Formvariablen – Lösen mit den Sonderfällen *23*

Ungleichungen mit einer Variablen **24**
Lineare Ungleichungen I *24*
Lineare Ungleichungen II *25*
Textaufgaben zu Ungleichungen *25*
Ungleichungen mit Beträgen *25*

Terme verstehen und aufstellen **26**
Terme gemäss Worten aufstellen *26*
Terme aufstellen *26*

Sachrechnen mit Algebra **27**
Terme für Gleichungen aufstellen und lösen *27*
Gleiche Abstände *27*
Verschnitt *28*
Geschwindigkeit *29*
Leistung *29*
Mischungen *29*

Funktionen II **30**
Funktion? Ja oder nein? *30*
Lineare Funktion - Steigung *32*
Zeichnen des Grafen: 3 Möglichkeiten *33*
Lineare Funktion – Vermischte Aufgaben *35*
Quadratische Funktion *38*

Lineare Gleichungssysteme **39**
Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen *39*
Textaufgaben lineare Gleichungssysteme 40
Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen *40*
Textaufgaben LGS mit 3 Variablen 40
Gleichungssysteme, die mit Substitution linear werden *40*

Potenzen – Ganzzahlige Potenzen umformen **40**
Potenzen - Schreibweisen *40*
Summen und Differenzen von Potenzen *41*
Multiplikation und Division mit Potenzen *41*
Bruchrechnen mit Potenzen *41*
Potenzen von Potenzen *41*
Potenzen von Summen *42*
Faktorenzerlegung *42*
Terme mit Potenzen aufstellen *42*

Rechnen mit Masseinheiten - Zehnerpotenzen **43**
Rechnen mit Masseinheiten – Zehnerpotenzen *43*
Rechnen mit Masseinheiten – Zehnerpotenzen - Textaufgaben *43*
Binome *44*

Lösungen

Mengenlehre **46**
Mengenlehre I *46*
Mengenlehre II *48*

Funktionen I

Proportion

1) $y = 2x$

2) $y = \frac{3}{2}x$

3)

x	5	-15	20	-30	35
y	3	-9	12	-18	21

4)

x	$\frac{5}{8}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{-5}{4}$
y	$\frac{15}{32}$	$\frac{-9}{20}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{-15}{16}$

5) a) $x \to 4x$

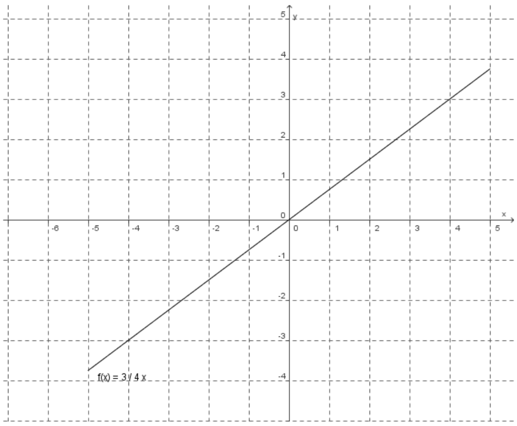
b) $x \to \frac{5}{2}x$

c) $x \to x$

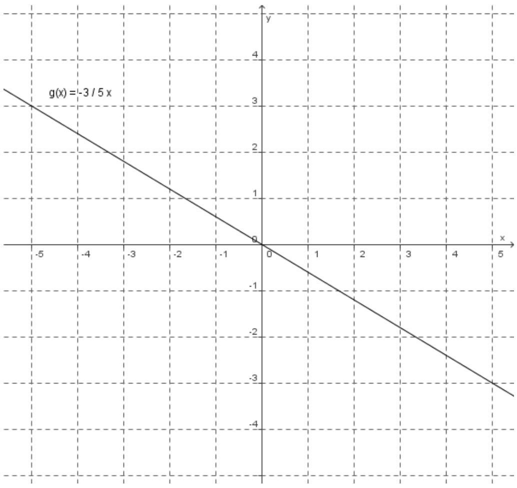
d) $x \to -\frac{5}{3}x$

e) $x \to -\frac{2}{5}x$

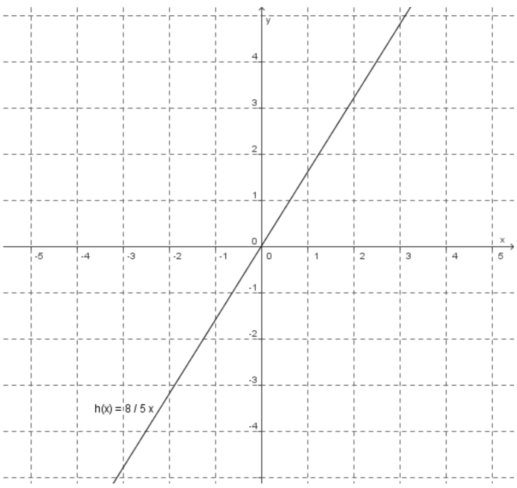
6a)



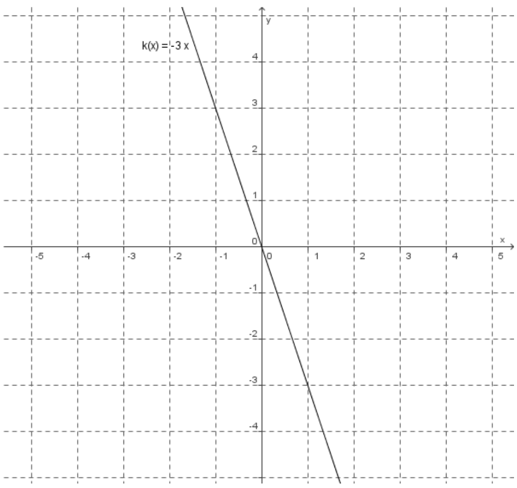
6b)



6c)



6d)



7a) *Zeit* $\to$ *Strecke*

$0.5\text{ h} \xrightarrow{\cdot 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} 15\text{ km}$

7b) *Seitenlänge* $\to$ *Umfang*

$3\text{ m} \xrightarrow{\cdot 4} 12\text{ m}$

Geschwindigkeit $\to$ Strecke

$50\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \xrightarrow{\cdot 0.75\text{ h}} 37.5\text{ km}$

7c) $\textit{Durchmesser} \rightarrow \textit{Umfang}$

$0.5\text{ cm} \xrightarrow{\cdot \pi} \frac{\pi}{2}\text{ cm}$

7d) $\textit{Gewicht} \rightarrow \textit{Preis}$

$7\text{ kg} \xrightarrow{\cdot 1.5\ \frac{\text{Fr.}}{\text{kg}}} 10.50\text{ Fr.}$

$\text{Kilopreis} \rightarrow \textit{Preis}$

$50\ \frac{\text{Fr.}}{\text{kg}} \xrightarrow{\cdot 0.8\text{ kg}} 40\text{ Fr.}$

8a) $10\text{ N} \xrightarrow{\cdot \frac{2}{5}\ \text{mm}/\text{N}} 4\text{ mm}$

$y = \frac{2}{5}x$

8b) $15\ ^\circ \xrightarrow{\cdot \frac{522}{360^\circ}\ \text{mm}/^\circ} 23\text{ mm}$

$y = \frac{23}{15}x$

8c) $13\text{ Stk.} \xrightarrow{\cdot 1.3\ \text{Fr}/\text{Stk.}} 16.90\text{ Fr.}$

$y = 1.3x$

8d) $12\text{ s} \xrightarrow{\cdot 3\ \text{m}/\text{s}^2} 36\ \text{m}/\text{s}$

$y = 3x$

9a) Menge [kg]$\rightarrow$Preis [Fr.]

$y = \frac{3}{4} \cdot x$

9b) Zeit [min]$\rightarrow$Länge [mm]

$y = \frac{5}{2} \cdot x$

9c) Zeit [s]$\rightarrow$Wärme [°]

$y = \frac{9}{10} \cdot x$

Antiproportion

1) $x \rightarrow \frac{432}{x}$

2) $x \rightarrow \frac{9}{5x}$

3)

x	0.2	0.4	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
y	12	6	1.2	3.6	4.8

4)

x	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{5}{6}$	-3	5
y	$\frac{-2}{3}$	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{-2}{15}$

5) a) $x \rightarrow \frac{1}{x}$

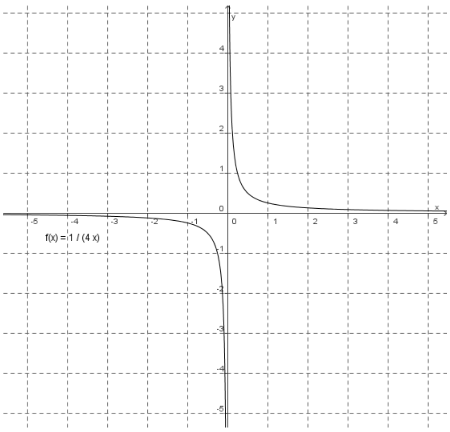
b) $x \rightarrow \frac{5}{x}$

c) $x \rightarrow \frac{8}{x}$

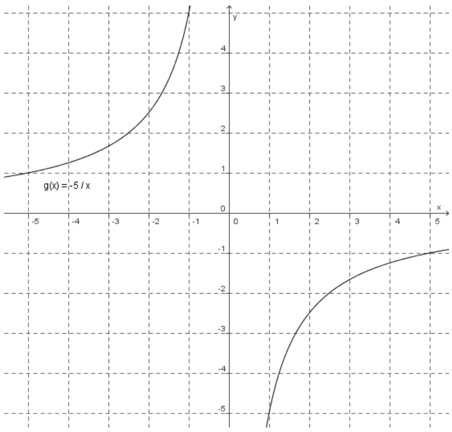
d) $x \rightarrow -\frac{4}{x}$

e) $x \rightarrow -\frac{10}{x}$

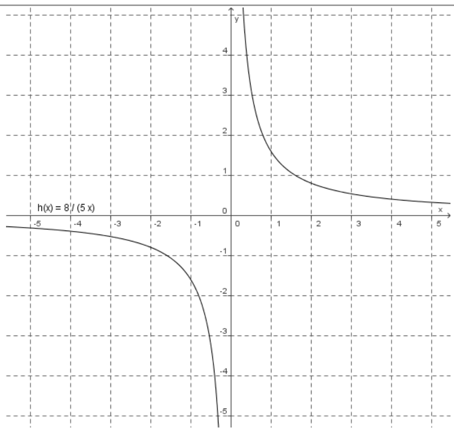
6a)



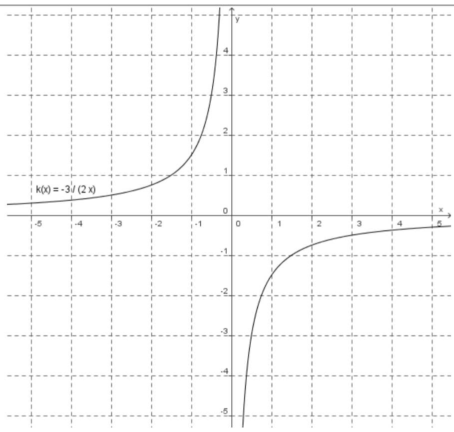
6b)



6c)



6d)



7a) $\underbrace{20\text{ Pers.}}_{x} \xrightarrow{\overbrace{\frac{30\text{ hl}}{x\text{ Pers.}}}^{a}} \underbrace{1.5\ {}^{\text{hl}}\!/_{\text{Pers.}}}_{y}$

7b) $\underbrace{20\text{ dl}}_{x} \xrightarrow{\overbrace{\frac{3\text{ dl}}{x\text{ dl}}}^{a}} \underbrace{0.15}_{y}$

7c) $\underbrace{9\text{ Tage}}_{x} \xrightarrow{\overbrace{\frac{270\text{ km}}{x\text{ Tage}}}^{a}} \underbrace{30\ {}^{\text{km}}\!/_{\text{Tag}}}_{y}$

7d) $\underbrace{20\ {}^{\text{Liter}}\!/_{\text{min.}}}_{x} \xrightarrow{\overbrace{\frac{5000\text{ Liter}}{x\ {}^{\text{Liter}}\!/_{\text{min.}}}}^{a}} \underbrace{250\text{ min.}}_{y}$

8a)

$$\underbrace{10\text{ mm}}_{x} \xrightarrow{\overbrace{\frac{40\text{ mm}^2}{x\text{ mm}}}^{a}} \underbrace{4\text{ mm}}_{y}$$

$$y=\frac{40}{x}$$

8b)

$$\underbrace{15}_{x} \xrightarrow{\overbrace{\frac{1350\text{ min.}^{-1}}{x}}^{a}} \underbrace{90\text{ min.}^{-1}}_{y}$$

$$y=\frac{1350}{x}$$

8c)

$$\underbrace{12\text{ mm}}_{x} \xrightarrow{\overbrace{\frac{720\text{ mm}}{x\text{ mm}}}^{a}} \underbrace{60\text{ Stk.}}_{y}$$

$$y=\frac{720}{x}$$

8d)

$$\underbrace{12\text{ s}}_{x} \xrightarrow{\overbrace{\frac{432\text{ m}}{x\text{ s}}}^{a}} \underbrace{36\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}}_{y}$$

$$y=\frac{432}{x}$$

9a) $Zeit\ [\text{s}] \rightarrow Volumen\ [\text{l}]$

$$y=\frac{2}{x}$$

9b) $(Grund-)Fläche\ [\text{m}^2] \rightarrow Höhe\ [\text{m}]$

$$y=\frac{20\ [\text{m}^3]}{x[\text{m}^2]}$$

9c) $Einwohner\ \rightarrow Prokopfanteil\ [{}^{\text{Fr.}}\!/_{\text{Pers.}}]$

$$y=\frac{1800}{x}$$

Sachrechnen mit Proportionen und Antiproportionen

Sachrechnen mit Proportionen und Antiproportionen

1) 11 h 13.57 min

35.7 hl → 205 min
117.3 hl → x min

$$x = \frac{205 \cdot 117.3}{35.7} \text{ min} = 673.57 \text{ min}$$

2) 47.5 h

22.20 Fr. → 49 h
22.90 Fr. → x h

$$x = \frac{49 \cdot 22.2}{22.9} \text{ h} = 47.5021 \text{ h}$$

3) 36 cm

297'000 Liter → 198 cm
243'000 Liter → x cm

$$x = \frac{198 \cdot 243'000}{297'000} \text{ cm} = 162 \text{ cm}$$

4) a) 140 Tage; b) 126 Tage

14 Rinder → 110 Tage
11 Rinder → x Tage

$$x = \frac{110 \cdot 14}{11} \text{ Tage} = 140 \text{ Tage}$$

14 Rinder → 60 Tage
11 Rinder → x Tage

$$x = \frac{60 \cdot 14}{11} \text{ Tage} = 76.364 \text{ Tage}$$

5) 601.25 g

ohne Stecker: 8 m → 580 g
6.5 m → x g

$$x = \frac{580 \cdot 6.5}{8} \text{ g} = 471.25 \text{ g} \quad (+\ 130 \text{ g})$$

6) 32 Räume

7) 6 Stunden

8) 7 Stunden täglich.

9) 6 Pfadfinder mehr.

10) 14.25 CHF

11) 100 Rollen

12) 3 Männer

Rechnen mit Anteilen

Rechnen mit Anteilen

1)

in Worten	Verhältnis	Bruch	Dezimalbruch	Prozent	Promille	ppm (parts per million)
7 von 8	7:8	$\frac{7}{8}$	0.875	87.5%	875 ‰	875'000 ppm
9 von 10	9:10	$\frac{9}{10}$	0.9	90%	900 ‰	900'000 ppm
3 von 5	3:5	$\frac{3}{5}$	0.6	60%	600 ‰	600'000 ppm
5 von 4	5:4	$\frac{5}{4}$	1.25	125%	1250 ‰	1'250'000 ppm
1 von 120	1:120	$\frac{1}{120}$	$0.008\overline{3}$	$0.8\overline{3}$%	$8.\overline{3}$ ‰	$8'333.\overline{3}$ ppm
3 von 8'000	3:8'000	$\frac{3}{8'000}$	0.000'375	0.0375%	0.375 ‰	375 ppm
19 von 200'000	19:200'000	$\frac{19}{200'000}$	0.000'095	0.009'5%	0.095 ‰	95 ppm
7 von 198	7:198	$\frac{7}{198}$	$0{,}0\overline{35}$	$3.\overline{53}$%	$35.\overline{35}$ ‰	$35'353.\overline{53}$ ppm
163 von 19'980	163:19'980	$\frac{163}{19'980}$	$0.00\overline{815}$	$0.\overline{815}$%	$8.\overline{158}$ ‰	$8'158.\overline{158}$ ppm

2) 0.5; 0.67, 0.625; 0.8; 0.667; 0.444; 0. 0909; 0.001; 0.0375; 0.95

3) $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{1}{12}$

4 70%

5 $\frac{10}{9}$

6) $\frac{13}{10} = 1.3$

7) $\frac{49}{48}$

8) $\frac{7}{4}$

9) 36°, 70°, 94.5°, 29°, 130.5°

10) 300 g

11a) 32%

b) 5'000.-€

12) a) 6.72 cm

b) $\alpha \rightarrow \dfrac{14\alpha}{225°}$

c) $b \rightarrow \dfrac{225 \cdot b}{14}$

Prozent- und Promillerechnung

Prozent- und Promillerechnung

1) 3.9155 kg, 1096.75 €, 8.45625 km
2) 32.55 Fr. 90.21 kg, 491.04 m^2
3) 229'896 Männer, 115'721 Frauen
4) 0.025 ‰
5) 7.18 % Abnahme
6) Nicht lohnend: 2.8 % weniger Einkünfte
7) 1250 Stk.

Steigung und Gefälle

1) 162 ‰
2) d=636.6 m
3) 104 cm

Brutto, Netto, Tara

1) 2.5 kg
2a) 10 kg 560 g
2b) Nein (2.59 t)
3) 2.16 Fr./100 g

Skonto und Rabatt

1) 1600.- €
2) b) ist mit 82.32 % besser als a) 82.45%
3) 7.7 % Rabatt
4) 6% bedeuten in 10 Tagen: 0.17%; 2% Skonto entsprechen einem Zinsfuss von 72% im Jahr. (es lohnt sich!)

Bankenwesen - Vermischtes

1) mit 8% ist das Angebot 200 € günstiger
2) 920.- Fr.
3) 66'071'430.- DM
4) 3.15 Jahre
5) 765.80 Fr.
6) a) 12'166.50 Fr. b) 2'000 CHF

Zinseszinsrechnung

1) 814.45 CHF
2) 753.80 CHF
3) 1055.01 CHF
4) 94.1% (94% ist falsch)
5) Bertrand hat 1.48 Fr. mehr auf dem Konto
6) a) Man muss 13'009.52 Franken einzahlen.
   b) Die letzte Einzahlung von Herrn Eibl betrug 1'015.85 Franken.

Teilungsrechnung / Finnazbeteiligung

Finanzbeteiligung

1) Schulz: 10.88 €; Weiss: 13.60 €
2) Aigner: 5.25 Fr.; Berger: 3.75 Fr.
3) Angela: 7418.-; Bea: 5436.- Christa: 5690.-
4) Klaus: 40'000.- €; Uwe: 32'000.- €
5) 160 Oberschüler, 440 Mittelstufenschüler
6) Angela: 100'000.- €; Bruno: 90'000.- €
7) Erbschaft: 80‘000.- €

Primzahlen

kgV und ggT - Anwendungen

1)
ggT(255cm ; 289cm) = 17cm Die Stufen dürfen höchstens 17cm hoch sein. Im Keller sind 17 Stufen.

2)
ggT(92cm ; 68cm) = 4cm Die Plättchen müssen eine Seitenlänge von 4cm haben. 23 Renate benötigt 391 Plättchen.

3 a)
kgV(42g ; 24g) = 168g Auf jeder Seite liegen 168g.

3 b)
Auf einer Seite liegen 4 Wägestücke zu 42 g, auf der anderen Seite liegen 7 Wägestücke zu 24g.

3 c)
Statt 4 und 7 Wägestücke sind auch 8 und 14 bzw. 12 und 21 bzw. 16 und 28 bzw. … möglich.

4)
12cm, 297 Fliesen

5)
2 Schiffe fahren nach 84, 210 und 420 Tagen gleichzeitig aus. 3 Schiffe nach 420 Tagen. 6. 40 cm

Teilbarkeitsregeln, kgV und ggT und die Primfaktorzerlegung

1) 1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 14; 21; 28; 42; 84

2) a) 96 ; b) 148 ; d) 836

3) b) 93 ; c) 282 ; d) 4185

4) a) 48 ; b) 126 ; d) 864

5) a) 4 ; 120 b) 15 ; 210 ; c) 12 ; 360

Grundlagen der Algebra

Terme ausrechnen

1) $T(5) = 9$

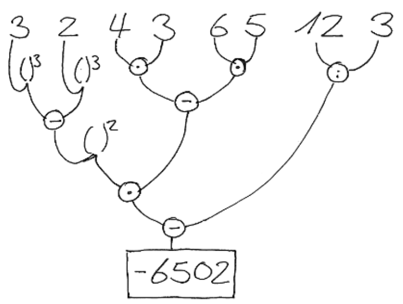
2) $T(-2) = -5$

3) Der Term T ist für die Werte x=0 und x=-1 nicht definiert. (Denn für diese Werte ergibt sich eine Division durch Null.

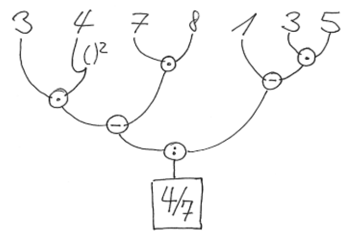
4) Für t=3.5 ist der Term nicht definiert. (Denn für t=3.5 ergibt sich eine Disvision durch Null).

Rechenbäume

1)



2)



Vorzeichen bei Strichoperationen

1) $-4a$

2) $7.1r$

3) $15ab$

4) $\frac{13}{3}d$

5) $-a$

6) $-13b-3x$

7) $-\frac{21}{2}-\frac{1}{2}y-\frac{11}{2}z-\frac{9}{2}x$

8) $\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}a$

Klammern bei Summen und Differenzen

1) $4b-7a$

2) $\frac{91}{5}t-\frac{171}{20}r$

3) $\frac{3}{10}e-\frac{23}{40}d-1$

4) $\frac{17}{10}x+\frac{9}{10}y+\frac{127}{24}z$

5) $3a+8b-16c$

6) $6xy+7x-3y$

7) $3z-7yz-8y$

8) $\frac{3}{4}c-\frac{3}{4}b$

Terme mit Summen und Differenzen aufstellen

1a) $l = 16a$

1b) $l = 272$ mm

2a) $d = R-(r-z)$

2b) $d = 56$ mm

3a) $x = \ell - 2(a+b+c+d)$

3b) $x = 28$ mm

4a) $2pq-7ab$

4b) $28.08\ m^2$

5) 3.58 km

Multiplikation (Vorzeichen bei Punktoperationen)

1) $T(2) = -1$

2) $T(2;-1) = 5$

3) $T(-2;-5) = -\frac{131}{15}$

4) $T(-2;5) = -\frac{19}{17}$

5) $-\frac{57}{10}axy$

6) $\frac{3}{2}adfg$

7) $-\frac{57}{10}abc$

8) $-3qrsz$

9) -3

10) -3

11) $\frac{1}{4}$

12) $-\frac{1}{2}$

Produkte zu Summen ausmultiplizieren

1) $12ab - 9ax + 21ac$

2) $15ab + 12a + 6b - 3ax - 6bx$

3) $\frac{15}{2}x + \frac{193}{4}y - \frac{385}{2}z$

4) $7a - \frac{8}{5}b - \frac{1}{5}c$

5) $34bx - 3ax + 22ay - 51by$

6) $12ax - 33bx - 21ay + 45by$

7) $7acx - \frac{31}{2}bcx + 2cdx$

8) $\frac{1}{2}acx - \frac{5}{2}ax - \frac{1}{2}bcx + \frac{5}{2}bx + 2cdx - 10dx$

Terme mit Produkten finden

1) $V = 6a^3 \;\; A = 22a^2$

2) $V = 84a^2b \;\; A = 80ab + 42a^2$

3) $V = 3a^2b \;\; A = 8ab + 6a^2 \;\; k = 6b + 16a$

Aus Summen Produkte bilden

1) $3b(7ax - 2y + 5z)$

2) $m(x + a + b - c)$

3) $\frac{b}{18}(6ax - 3y + 2z)$

4) $\frac{m}{6}(5b - a)$

5) $(b - c)(z + 1)$

6) $7n(b + 1)$

7) $\dfrac{(p - q)(c + 2)}{c}$

8) $(4t + 3m)(2 - b)$

9) $(a - 6b)(p - q)$

10) $(2a + 3d)(b + c)$

11) $\frac{1}{12}(9r + 8s + 12)(w - g)$

12) $(3x - 2a)(4y + 5b)$

13) $(a - b)(2x + y + z)$

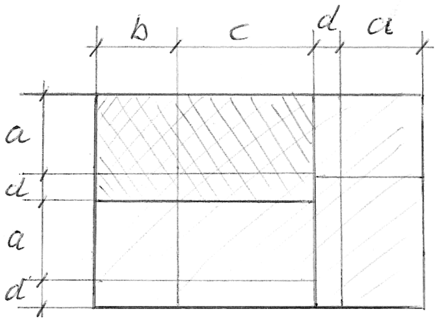
14) $-4 \cdot (3a + b)$

15) $(3x - 2a - 2)(y + 3b)$

16) $(a - 4)(2c + d)$

Terme mit Produkten und Quotienten aufstellen

1) $3(a+d)(b+c)=2(a+d)(a+b+c+d)$



2) a) $\frac{(a+1)(b-1)}{ab}\cdot 100$

oder :

$\left(\frac{(a+1)(b-1)-ab}{ab}\right)\cdot 100=\left(\frac{b-a-1}{ab}\right)\cdot 100$

b) $\approx 82.54\%$ so gross wie *ab*

oder :

$\approx 17.46\%$ kleiner als *ab*

Lineare (Un-)Gleichungen mit einer Variablen

Lineare Gleichungen ohne Parameter mit 1 Lösungsvariablen

1) $L=\left\{\frac{16}{5}\right\}$

2) $x=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\Rightarrow L=\{\ \}$

3) $L=\{21\}$

4) $-8\neq -9\Rightarrow L=\{\ \}$

5) $L=\left\{\frac{32}{35}\right\}$

6) $L=\{3\}$

Textaufgaben zu linearen Gleichungen

Lineare Gleichungen: Textaufgaben

1) Nach 8 Jahren.

2) Nach 3 Jahren.

3) Die Seiten sind: 43 mm und 77 mm.

4) Seite vor der Veränderung: 6 cm

5) Die Kartoffeln kosten 0.4 Fr., ...

6) 62.5km

Gleichungen zweiten Grades

Quadratische Gleichungen vom Typ «Produkt = 0»

1) $L=\left\{0,\frac{5}{2}\right\}$
2) $x_1=\frac{2}{3}, x_2=-\frac{2}{3}$ oder $L=\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}$
3) Keine Lösung.
4) $L=\{0,7\}$

Quadratische Gleichungen vom Typ «x^2=a»

1) $L=\{-10,10\}$
2) $L=\{-5,5\}$
3) $L=\{-7,7\}$
4) $L=\{-6,6\}$

Numerische quadratische Gleichungen

1) $L=\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$
2) $L=\left\{0,\frac{2}{5}\right\}$
3) $L=\{2,3\}$
4) $L=\{2,3\}$
5) $L=\{-5,-3\}$
6) $L=\{-3,1\}$
7) $L=\left\{\frac{1}{5},3\right\}$
8) $L=\left\{\frac{-5}{12}\right\}$
9) $L=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$
10) $L=\left\{-\frac{3}{5}\right\}$
11) $L=\left\{(6|1),(-2|-3)\right\}$
12) $L=\left\{(-2|6),(4|-3)\right\}$

Textaufgaben die auf quadratische Gleichungen führen

1a) $A=(20-3x)(16+x)=-3x^2-28x+320$
1b) $x=1$
2) $L=\left\{\left(\frac{5}{3},\frac{9}{4}\right),\left(3,\frac{5}{4}\right)\right\}$

Bruchrechnen

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

1) $\frac{2a+4b+2}{c}$ für $c \neq 0$

2) $\frac{9x+2a}{2}$ in $\mathbb{Q}$

3) $\frac{4c+7d}{c+d}$ für $c+d \neq 0$

4) $\frac{11ab+2a-9b}{27abz}$ für $a,b,z \neq 0$

5) $\frac{7}{x-1}$ für $x \neq 1$

6) $\frac{x(a+b+27)+5y(a+b)}{3(a+b)}$ in $\mathbb{Q}$ für $a \neq -b$

7) $\frac{x}{3(x-1)}$ für $x \neq 1$

8) $\frac{7a+10}{15(a+2)}$ für $a \neq -2$

9) $-\frac{a+6}{2(5b+3)}$ für $b \neq -\frac{3}{5}$

10) $\frac{18a}{5a-3}$ für $a \neq \frac{3}{5}$ und $n \neq -1$

11) $\frac{1}{(n-1)}$ für $a \neq -2$ und $n \neq 1$

12) $\frac{1}{(k+2)(z-1)}$ für k $\neq$ -2 und $z \neq 1$

13 $\frac{bc-2b+2c-2}{c\cdot(b+1)}$ für a,$c \neq 0$ und $b \neq -1$

14) $\frac{2a+b}{b(a-1)}$ für $a,c \neq 1$ und $b \neq 0$

Kürzen von Brüchen

1) $\frac{7a}{b}$ in $\mathbb{Q}$ für $x \neq 0$

2) $\frac{b}{3a}$ in $\mathbb{Q}$ für $a, x \neq 0$

3) $a+b$ in $\mathbb{Q}$

4) $\frac{2}{a+1}$ in $\mathbb{Q}$ für $a \neq -1$

5) $a+b$ in $\mathbb{Q}$ für $x \neq 0$

6) $2(4a-2b+3c)$ in $\mathbb{Q}$

7) $\frac{2n+x}{4n+5x}$ in $\mathbb{Q}$ für $4n+5x \neq 0$

8) $\frac{3a}{4c}$ in $\mathbb{Q}$ für $c \neq 0$ und für $b \neq \frac{5}{2}$

9) $\frac{8b+c}{11b+2c}$ in $\mathbb{Q}$ für $a \neq 0 \wedge 11b+2c \neq 0$

10) $\frac{12x-5y}{3}$ in $\mathbb{Q}$ für $a \neq -c$

11) $4c-2dx-\frac{1}{2}$ für $a \neq 0$

12) $13ab-4ac+15bc$ für $d \neq 0$

13) $6x-7y$

14) $\frac{10c}{3b}+\frac{b}{2c}$ für b,c,$x,y \neq 0$

Multiplizieren von Brüchen

1) $\frac{8axy}{3}$ für $b \neq 0$

2) $-\frac{3bx}{8}$ für $y \neq 0$

3) $-\frac{1}{9}$ für $a \neq 3b$ und für $x \neq \frac{3}{4}y$

4) $\frac{3x}{4}$ für $a,t,x \neq 0$

5) $\frac{5(a+b)}{4(a-b)}$ für $a \neq b$ und für $x \neq -y$

6) $-\frac{2a}{3}$ für a,$x \neq 0$ und für $x \neq a$

7) $\frac{c}{4b}$ für $c \neq -2 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq 1$

8) $-\frac{1}{5}$ für $x \neq 2 \wedge y \neq -3$

Dividieren von Brüchen

1) $\frac{75ab}{2x}$ für $b,x \neq 0$

2) $\frac{1}{10}$ für $a,x \neq 0$

3) $\frac{35}{48}$ für $|a| \neq 5b$

4) $\frac{3}{2}$ für $a,b,x,y \neq 0$

5) $\frac{x+y}{y-x}$ für $x \neq y$ und für $x,y \neq 0$

6) $\frac{2ab+a+b}{a-b}$ für $a \neq b$ und für $a,b \neq 0$

Die vier Grundoperationen mit Brüchen

1) $\dfrac{x-6y}{a+b}$ für $a \neq -b$

2) $\dfrac{9(x-6y)}{20\cdot(x-y)}$ für $x \neq y$

3) 0 für $x, y \neq 0$

4) $\frac{b}{2} - \frac{ax}{2} + \frac{317}{26}$ für $x \neq 0$

5) $-\frac{47}{48}$ für $|a| \neq 5b$

6) $\frac{5b}{2(2a-1)}$ für $a \neq \frac{1}{2} \wedge b \neq 1$

7) $T(a,b) = \dfrac{b(3+ab)}{9(a+1)}$; für $a,b \neq 0 \wedge a \neq -1$

$T\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{27}$

8) $T(a,b) = \dfrac{1}{4(a+2)(3b-1)}$; für $a \neq -2 \wedge b \neq \frac{1}{3} \wedge a \neq b - \frac{2}{3}$

$T\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{20}$

9) $T(a,z) = \dfrac{z+2}{a(z-1)}$ für $a \neq 0 \wedge z \neq 1$

$T\left(-\frac{2}{3}, -\frac{6}{5}\right) = \dfrac{6}{11}$

10) $T(a,b) = \dfrac{(z+2)(z-1)}{a}$; für $a \neq 0 \wedge z \neq 1$

$T\left(\frac{2}{3}, \frac{6}{5}\right) = \dfrac{24}{25}$

Bruchgleichungen

Lineare Gleichungen mit Variablen im Nenner

1) $L=\{12\}$
2) $L=\{\frac{2}{7}\}$
3) $L=\{-3\}$
4) $L=\{-19\}$
5) $L=\{3\}$
6) $3\neq-9\Rightarrow L=\{\ \}$
7) $L=\{12\}$
8) $x=-\frac{13}{2}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow L=\{\ \}$
9) $x=\frac{1}{8}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow L=\{\ \}$
10) $L=\{0\}$

Bruchgleichungen (und Terme) aufstellen

1) $T(\alpha)=60^\circ+\frac{\alpha}{12}$
2) $T(n)=\frac{n\cdot(n+1)}{n-1}$
3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{45}$
4) $\frac{3.5+4+2.5}{\frac{3.5}{7.1}+\frac{4}{8.9}+\frac{2.5}{10.5}}\approx 8.47\,{}^{\mathrm{kg}}\!/_{\mathrm{dm}^3}$
5) $\frac{3n+3}{3}$=n+1; $\frac{4n+6}{4}=n+\frac{3}{2}$

Lineare Gleichungen mit Formvariablen

Formeln umstellen

1) $P_v = P_{zu} \cdot (1 - \eta)$

2) h= $\frac{P \cdot t}{m \cdot g}$

3) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

4) $d = \sqrt{D^2 - \frac{4 \cdot A}{\pi}}$

Lineare Gleichungen mit Formvariablen

1) $x = \frac{1-a^2}{2a+1}$ für $a \neq -\frac{1}{2}$

2) $x = \frac{3a-2b}{a-b-1}$ für $a \neq b+1$

3) $x = \frac{a-a^2}{3}$

4) $x = \frac{2-b}{a+1}$ für $a \neq -1$

5) $x = 3a + 2$ für $b \neq 2$

6) $x = 3 - a$ für $b \neq \frac{1}{2}$

7) $x = a - 1$ für $a \neq b - 1$

8) $x = \frac{3a+b}{2(b-1)}$ für $b \neq 1$

Diskussion der Lösungsmenge

Lineare Gleichungen mit Formvariablen – Lösen mit den Sonderfällen

1) $L=\left\{\frac{b}{a-3}\right\}$ für $a\neq 3$
oder $L=\mathbb{Q}$ für $a=3\wedge b=0$

2) $L=\left\{\frac{2-a}{b+1}\right\}$ für $b\neq -1$
oder $L=\mathbb{Q}$ für $b=-1\wedge a=2$

3) $L=\{3b+2\}$ für $a\neq 2$ oder $L=\mathbb{Q}$ für $a=2$

4) $L=\{3-b\}$ für $a\neq \frac{1}{2}$ oder $L=\mathbb{Q}$ für $a=\frac{1}{2}$

5) $L=\{b-1\}$ für $a\neq b+1$
oder $L=\mathbb{Q}$ für $a=b+1$

6) $L=\left\{\frac{3a+b}{2(b-1)}\right\}$ für $b\neq 1$
oder $L=\mathbb{Q}$ für $b=1\wedge a=-\frac{1}{3}$

Ungleichungen mit einer Variablen

Lineare Ungleichungen I

1) Formuliere eine Ungleichung und gib den Grundbereich der Variablen an.

a) Der Pegel eines Fllusses stieg innerhalb einer Woche von 1,50 m auf über 9,00 m.

x: Pegelzunahme in m   Ungleichung: *1,50 + x > 9,00* $x \in \mathbb{Q}^+$

b) Die Einwohnerzahl einer Stadt hat sich in den letzten 50 Jahren verdoppelt und beträgt jetzt
mindestens 40 000 Einwohner.

y: Einwohnerzahl vor 50 Jahren   Ungleichung: *2y ≥ 40 000* $y \in \mathbb{N}$

c) Der Luftdruck fiel von 1 017 hPa (Hektopascal) auf unter 1 005 hPa.

z: Luftdruckabnahme in hPa   Ungleichung: *1 017 – z < 1 005* $z \in \mathbb{N}$

2) Unterstreiche, welche der folgenden Lösungen in Aufgabe 1 zu wahren Aussagen führen.

1 a)	x = 7,50	x < 7,49 m	**x > 7,50 m**	x ≥ 7,50
1 b)	y < 20 000	y = 19 999	**y ≥ 20 000**	y ≤ 20 000
1 c)	z = 12	z < 13	z < 12	**z > 12**

3) Entscheide, ob die Lösungsmengen der Ungleichungen leer, begrenzt oder unendlich sind.

Ungleichung	Grundbereich	Lösungsmenge	Entscheidung
3a < 1	G = $\mathbb{N}_0$	*L = {0}*	*Lösungsmenge begrenzt*
21 : b < 7	G = $\mathbb{Z}$	*L = {… –4; –3; –2; –1; 4; 5; 6; 7 …}*	*Lösungsmenge unendlich*
8c < –c	G = $\mathbb{Q}^+$	*L = { }*	*Lösungsmenge leer*

Lineare Ungleichungen II

1) $L = \{d \mid d > -2\}$

2) $L = \{y \mid y > -\frac{4}{11}\}$

3) $L = \{t \mid t > \frac{3}{2}\}$

4) $L = \{a \mid a < 1\}$

5) $L = \{w \mid w \geq -3\}$

6) $L = \{\ \}$

Textaufgaben zu Ungleichungen

1) $L = \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$ für $G = \mathbb{N}_0$

2) $L = \{27; 30; 32; 33; 35\}$

3) $n < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \{0\}$ für G=$\mathbb{N}_0$

Ungleichungen mit Beträgen

1a) $x \in \left]-1, 1\right[$

1b) 

2a) $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\vee x \in \left]\frac{5}{2}, \infty\right[$

2b) 

3a) $x \in \left]-3, 7\right[$

3b) 

4a) $x \in \left]-\infty, -7\right[\vee x \in \left]11, \infty\right[$

4b) 

Terme verstehen und aufstellen

Terme gemäss Worten aufstellen

1) $2n-1=$
2) $n\cdot(n+1)=$
3) $-(a^2+b^2)=$
4) $|a-b|=$

Terme aufstellen

1) 60 Möglichkeiten 3 von 5 unterschiedlichen Kugeln zu ziehen.
2) $\underbrace{n}_{4}\cdot\underbrace{(n-1)}_{3}\cdot\underbrace{(n-2)}_{2}\cdot\underbrace{(n-3)}_{1}$
3) 120 Möglichkeiten haben die Junioren, die Bühne einzeln zu betreten.
4) $T_{(n)}=(n-2)\cdot 5$
5) $T_{(n)}=2\cdot n+\frac{n}{2}-2$
6) Der Wert des Terms ist: 2.5

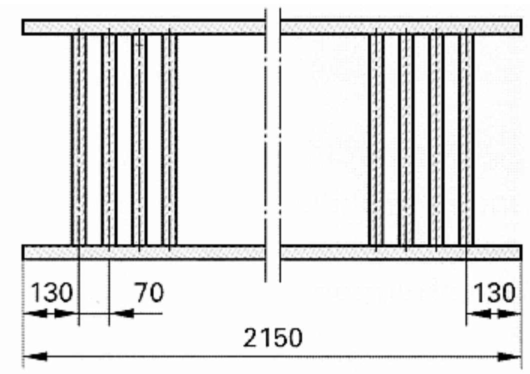
Sachrechnen mit Algebra

Terme für Gleichungen aufstellen und lösen

1)	$15 + 0.05x = 18$	Paul hat 60 SMS verschickt.
2)	$4 \cdot 15 + x \cdot 10 = 120$	Es gibt 6 Kinder in der Gruppe.
3)	$200 \cdot 4 + 300 \cdot x = 2000$	Rohr B war 4 Stunden im Betrieb.
4)	$10 + 5x = 40$	Tim kann 6 Stunden fahren.

Gleiche Abstände

1)

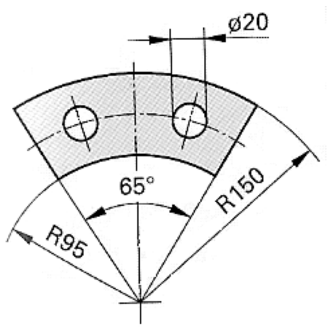


$2130 - 2 \cdot 130 = 1890$

Lichte Breiten: $\frac{1890}{70} = 27$

Stäbe: $27 + 1 = \underline{\underline{28 \text{ Stück}}}$

2)



Teilung: $\overset{\frown}{p} = \frac{1}{16} u$

Umfang: $u = 2r\pi$

Radius: $2r = {}^{1}\cancel{2} \cdot \frac{R_{150} + R_{95}}{\cancel{2}_{1}}$

$2r = 245$

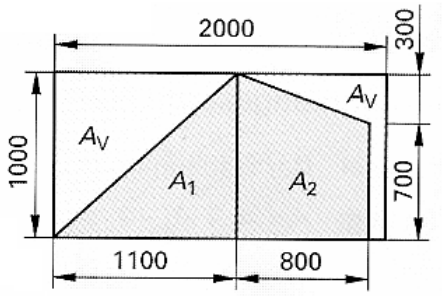
$u = 245\pi$

$u \approx 770.7$

$\overset{\frown}{p} = \frac{1}{16} \cdot 770.7$

$\overset{\frown}{p} \approx \underline{\underline{48.1 \text{ mm}}}$

Verschnitt

1)	 **Knotenblech**	$A_{Tafel} = 20 \cdot 10\ \text{dm}^2$ $= 200\ \text{dm}^2$ $A_{Knotenb} = \frac{11 \cdot 10}{2} + \frac{10+7}{2} \cdot 8$ $= 90\ \text{dm}^2$ $A_{verschn} = A_{Tafel} - A_{Knotenb}$ $a) \quad = \underline{\underline{11000\ \text{mm}^2}}$ $V_{erschnitt\%} = \frac{110}{200} \cdot 100$ $b) \quad = \underline{\underline{55\%}}$

Geschwindigkeit

1) 17 km/h
2) 8 Sekunden
3) 43 km/h
4) 0.79 m/s
5) 26 km/h und 30km/h
6*) 18 Sekunden

Leistung

1) Grosser LKW: 36 Fahrten. Kleiner LKW: 45 Fahrten; Mögliche Gleichung:1/20 = 1 / x + 1 / (x+9)

2) 60 Stunden; Mögliche Gleichung: 1/x = 1/15 - 1/20

3) Die Zuleitung 2 hat alleine 15 h.

4) Nr. 2 und Nr. 3 zusammen 1h 12 min   Nr. 1 allein: 1.5h   Nr. 2 allein: 3h   Nr. 3 allein: 2h

Mischungen

1) Gesamtkosten steigen um 4.8 %
2) 67.5 kg zu 6 € und 45 kg zu 5 €
3) 400 g
4a) 15 kg
5) 34.5°
6) 15 Liter
7) 13.3 %
8) 20 %
9a) 12.5 %   b) 15 %
10) ¾ Liter 30 %; ¼ Liter 70 %
11) 62.5 %

Funktionen II

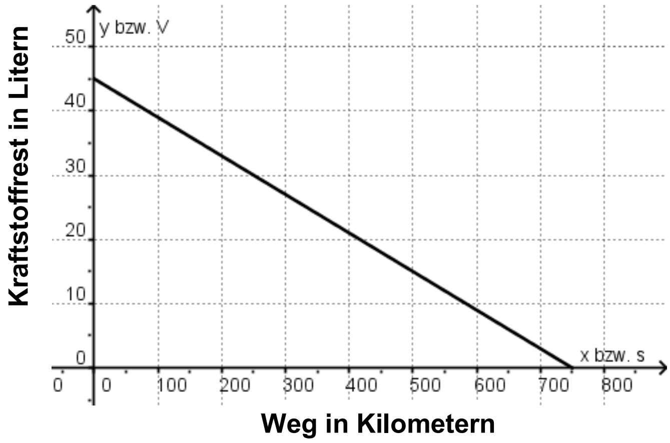
Funktion? Ja oder nein?

1)
a und b sind Funktionen. c und d sind keine Funktionen.

Eine (lineare) Funktion finden

a)

x Fahrstrecke in km	y Kraftstoffrest in l
0	45
100	39
200	33
300	27
400	21
500	15
600	9
700	3



Nachdem die Zahlenpaare aus der Wertetabelle als Punkte in das Koordinatensystem eingetragen worden sind, kann man erkennen, dass alle Punkte auf einer Linie liegen. Es ist sinnvoll, die Punkte gradlinig zu verbinden (warum?), man erhält eine **Gerade** (besser: den Teil einer Geraden).

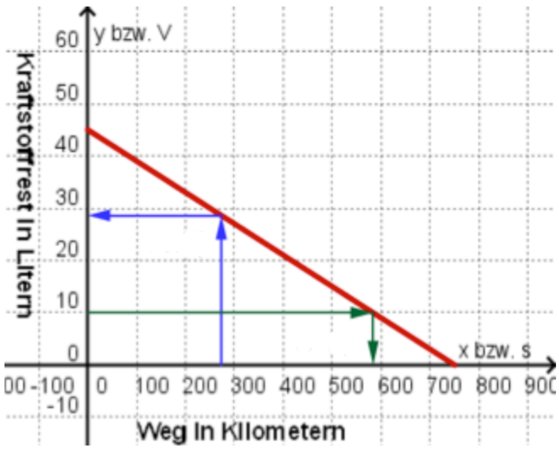
x Fahrstrecke in km	y Kraftstoffrest in l
0	45
1	$45 - \frac{6}{100} \cdot 1 = 44{,}94$
2	$45 - \frac{6}{100} \cdot 2 = 44{,}88$
100	$45 - \frac{6}{100} \cdot 100 = 39$
x	$45 - \frac{6}{100} \cdot x = y$

Da für 100 km 6 Liter verbraucht werden, werden pro km $\frac{6}{100}$ l verbraucht.

Allgemein: $45 - \frac{6}{100} \cdot x = y$

Aus systematischen Gründen schreiben wir $y = -\frac{6}{100}x + 45$

b)



Es handelt sich hierbei um eine Funktion, weil für jede gefahrene Strecke $D = \{x | 0 \leq x \leq 750\}$ genau ein bestimmter Kraftstoffrest vorhanden ist.

Für x = 750 km ist der Tank leer.

c)

Von der km-Zahl 273 auf der x-Achse wird eine Senkrechte bis zur Geraden gezeichnet, von dort wird eine Waagerechte bis zur y-Achse gezeichnet. Man kann als Literzahl ablesen: y ≈ 28 (ungefähr).
Die exakte Berechnung: x = 273 ist gegeben, gesucht ist „das zugehörige y" Setzt man in der Gleichung $y = -\frac{6}{100}x + 45$ für x die Zahl 273 ein, dann erhält man $y = -\frac{6}{100} \cdot 273 + 45 =$ 28.62, d.h. nach einer Fahrstrecke von 273 km sind noch 28.62 Liter im Tank.

d)

Von der Literzahl 10 auf der y-Achse gelangt man zur gesuchten Kilometerzahl (x ≈ 590). Die genaue Berechnung: Im Gegensatz zu d1) ist jetzt eine Literzahl gegeben (y = 10) und „das entsprechende x" ist gesucht.
Setzt man in der Gleichung $y = -\frac{6}{100}x + 45$ für y die Zahl 10 ein, dann erhält man

$10 = -\frac{6}{100}x + 45 \Rightarrow x = 583\frac{1}{3}$, d.h. nach einer Fahrstrecke von $583\frac{1}{3}$ km befinden sich noch 10 Liter im Tank.

Lineare Funktion - Steigung

1a)
Die Steigung beträgt 10.

1b)
Die Einheit ist m/s. Somit bedeutet die Steigung hier die Geschwindigkeit des Velorennfahrers.

2a)
Der Velofahrer ist mit v=5m/s unterwegs.

2b)
Er war bei der Streckenmarke s=45m. (Er hat 45m in 9 Sekunden zurückgelegt).

2c)
Die Steigung ist m=5.

3)
Die Steigung ist $m = -3$.
Geometrisch bedeutet eine negative Steigung, dass die Gerade nach unten fällt, wenn man sich in x-Richtung nach rechts bewegt. Für jede Erhöhung von x um 1 fällt der Funktionswert um 3 Einheiten.

4)
Die Steigung m wird mit der Formel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ berechnet:

$$m = \frac{8-2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

Die Steigung beträgt also 2. Das bedeutet, die Funktion steigt um 2 Einheiten in y-Richtung für jede Einheit in x-Richtung.

5)
Wenn die Steigung $m = 0$ ist, ist die Gerade horizontal, das heißt, sie verläuft parallel zur x-Achse. Die Funktionsgleichung hat die Form $f(x) = c$, wobei c eine Konstante ist. Beispiel: $f(x) = 3$ bedeutet, dass die Gerade immer bei $y = 3$ verläuft, unabhängig von x.

6)
Die Steigung $m = \frac{4}{3}$ bedeutet, dass für jede Erhöhung von x um 3 Einheiten der Wert von y um 4 Einheiten steigt.
Das Steigungsdreieck zeigt also einen Anstieg von 4 Einheiten nach oben und eine Bewegung von 3 Einheiten nach rechts. Geometrisch bildet dies ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Anstieg (vertikale Seite) 4 und dessen Basis (horizontale Seite) 3 ist.

7)
Beide Funktionen haben die Steigung $m = 3$.
Da die Steigung gleich ist, sind die beiden Geraden parallel zueinander. Das bedeutet, sie verlaufen mit derselben Steilheit, aber schneiden sich niemals, da sie unterschiedliche y-Achsenabschnitte haben.

8)
Die Gerade $f(x) = x$ hat die Steigung $m = 1$, was bedeutet, dass sie um 1 Einheit in y-Richtung steigt, wenn x um 1 steigt.
Die Gerade $f(x) = -x$ hat die Steigung $m = -1$, was bedeutet, dass sie um 1 Einheit fällt, wenn x um 1 steigt.
Die erste Gerade steigt, während die zweite Gerade fällt. Sie sind Spiegelbilder zueinander bezüglich der x-Achse.

9)
Wenn $f(x) = mx + b$ zu $f(x) = -mx + b$ umgewandelt wird, ändert sich die Steigung von $mzu - m$. Das bedeutet, dass die Gerade, die ursprünglich anstieg, jetzt mit derselben Steilheit fällt. Der Vorzeichenwechsel bei m führt dazu, dass die Gerade gespiegelt wird (um die y-Achse).

10)

a) $3y = -5x + 12$

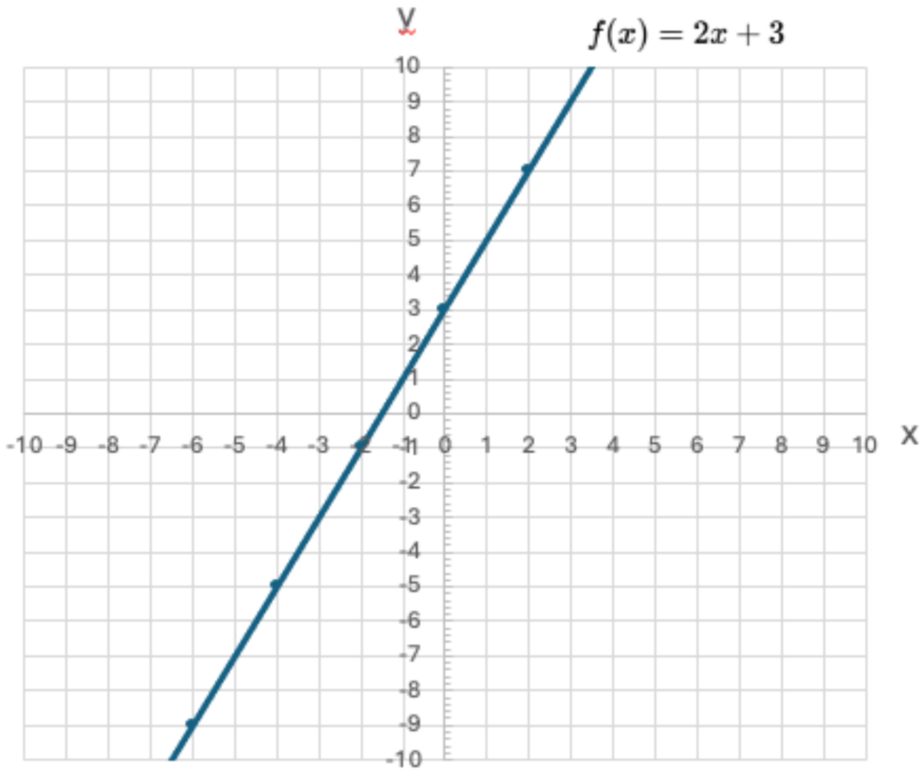
$y = \underline{-\frac{5}{3}x + 4}$ $\qquad$ $\underline{m = -\frac{5}{3}\ b = 4}$

b) $y = \underline{-\frac{2}{3}x + 7}$ $\qquad$ $\underline{m = -\frac{2}{3}\ b = 7}$

c) $y = \underline{0x - 4}$ $\qquad$ $\underline{m = 0\ b = -4}$

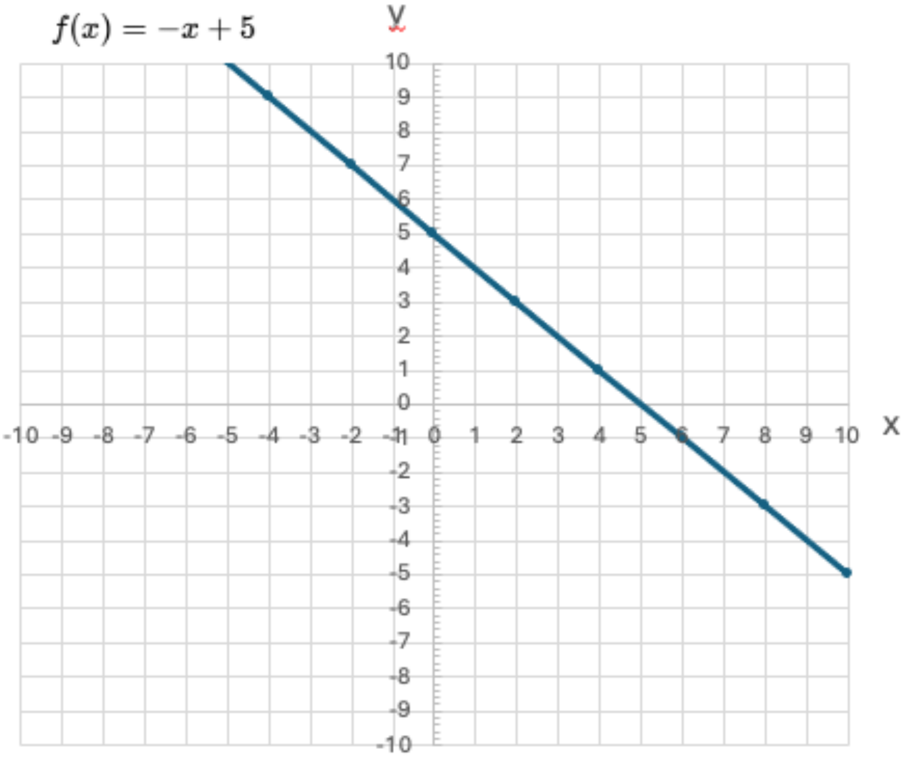
Zeichnen des Grafen: 3 Möglichkeiten

1)



2)

$f(x) = -x + 5$

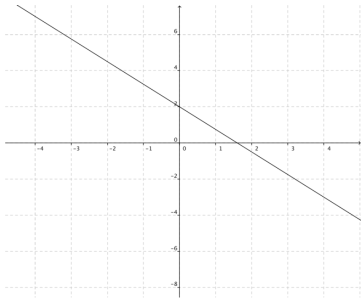


Lineare Funktion – Vermischte Aufgaben

1)

Funktion durch die beiden Punkte bestimmt:

$$m = \frac{22-(-18)}{-16-16} = \frac{40}{-32} = \underline{-\frac{5}{4}}$$



Für die Skizzierung des Grafen bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der x- und der y-Achse.

b durch einsetzen in die Geradengleichung bestimmen:

$y = mx + b$

Die Steigung m ist bekannt, weiter ist bekannt, dass die gesuchte Funktion durch die Punkte A, sowie B, geht.

Wir wählen z.B. Punkt A:

$$-18 = -\frac{5}{4} \cdot 16 + b$$

$\underline{b = 2}$

Die Funktionsgleichung lautet:

$$\underline{\underline{y = -\frac{5}{4}x + 2}}$$

2)

Idee: Es sind zwei Punkte gegeben.

$A(-1;6)$ und N(5;0)

Nullstelle heisst: der y-Wert ist Null.

Damit erhalten wir, wie bei Aufgabe 3) gezeigt, die Funktion:

$$m = \frac{0-6}{5-(-1)} = \frac{-6}{6} = \underline{-1}$$

$y = mx + b$

$0 = -1 \cdot 5 + b$

$\underline{b = 5}$

$\underline{\underline{y = -x + 5}}$

Kontrolle durch einsetzen eines Punktes:

$6 = -(-1) + 5$

$6 = 6 \;\rightarrow\;$ wahr

Idee: Es sind zwei Punkte gegeben.

$A(-3;5)$ und P(0;-3)

P liegt auf der y-Achse, also ist seine x-Koordinate immer Null.

$$m = \frac{-3-5}{0-(-3)} = \frac{-8}{3} = \underline{-\frac{8}{3}}$$

$y = mx + b$

$\underline{b = -3}$

$$\underline{\underline{y = -\frac{8}{3}x - 3}}$$

Kontrolle durch einsetzen eines Punktes:

$$5 = -\frac{8}{3} \cdot (-3) - 3$$

$5 = 5 \;\rightarrow\;$ wahr

3)

Nach 62.5 Minuten Gesprächsdauer ist Smalltalk gleich teuer wie SalamiTalk.

4)

S(-75.4 | 173.8)

5)

m = -0.6

6)

Die Funktion f(x) schneidet die Abszisse bei x= $83.\overline{3}$

7)

92%

8)

$$n_{(p)} = \frac{1}{3}p + 1$$

9)

a) $V = 4000\,Liter - (250\,Liter / \min) \cdot t$

b) $V = 2700\,Liter - (250\,Liter / \min - 150\,Liter / \min) \cdot t$

10)

Aufstellen der Gleichungen
Wir modellieren beide Tarife als lineare Funktionen, wobei x den monatlichen Stromverbrauch in Kilowattstunden (kWh) und y die monatlichen Gesamtkosten in CHF beschreibt.

- Tarif 1:

$$y_1 = 20 + 0.30x$$

(Grundpreis: $20CHF, 0.30CHF$ pro kWh)

- Tarif 2:

$$y_2 = 15 + 0.35x$$

(Grundpreis: $15CHF, 0.35CHF$ pro kWh)

Gleichsetzen der Tarife
Um herauszufinden, ab wann Tarif 2 günstiger ist, setzen wir die beiden Gleichungen gleich und berechnen den Verbrauch x, ab dem beide Tarife gleich teuer sind:

$$20 + 0.30x = 15 + 0.35x$$

Gleichung lösen
Bringen wir die Variablen auf eine Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} 20 - 15 &= 0.35x - 0.30x \\ 5 &= 0.05x \end{aligned}$$

Nun teilen wir durch 0.05 , um x zu isolieren:

$$x = \frac{5}{0.05} = 100$$

Interpretation
Beide Tarife kosten bei einem Verbrauch von 100 kWh pro Monat gleich viel. Tarif 2 ist für Verbräuche über 100 kWh günstiger, da der Grundpreis von Tarif 2 niedriger ist, aber der Verbrauchspreis höher. Für Verbräuche unter 100 kWh ist Tarif 1 günstiger.
5. Überprüfung

- Für 100 kWh :
- Tarif 1:

$$y_1 = 20 + 0.30 \times 100 = 20 + 30 = 50CHF$$

- Tarif 2:

$$y_2 = 15 + 0.35 \times 100 = 15 + 35 = 50CHF$$

Die Tarife sind bei 100 kWh gleich teuer

Antwort
Ab einem Verbrauch von mehr als 100 kWh pro Monat ist Tarif 2 günstiger als Tarif 1.

11)

6.25 cm^2

Quadratische Funktion

1)

x	1	2	3	4	5
y	0	3	8	15	24

$y=(x-1)(x+1)$
$=x^2-1$

2)

x	-3	-1	2	3	5
y	10	0	0	4	18

$y=(x+1)(x-2)$
$=x^2-x-2$

3)

x	-1	0	1	4	5
y	9	4	1	4	9

$y=(x-2)^2=x^2-4x+4$

4)

x	-2	-1	0	2	3
y	0	-1	0	8	15

$y=x^2+2x=x(x+2)$

5) a) $y=(x-0)\cdot(x-0)=x^2$

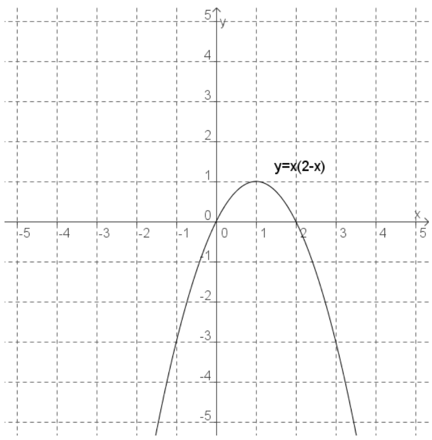
b) $y=(x+1)(x-1)=x^2-1$

c) $y=(x+2)(x-2)=x^2-4$

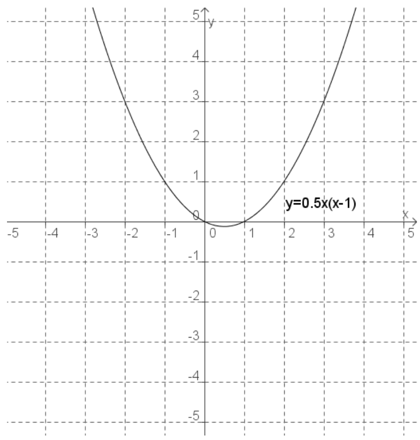
d) $y=(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$

e) $y=(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$

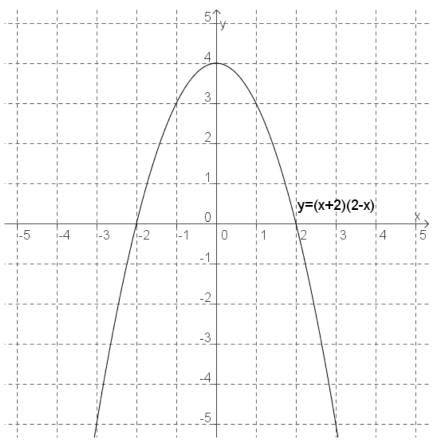
6)



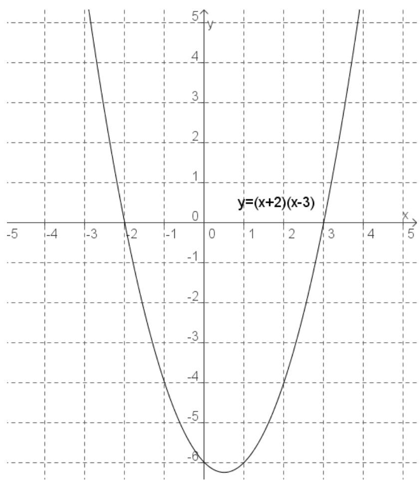
7)



8)



9)



Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen

Lineare Gleichungssysteme: Einsetzungsmethode

1) $L = \{(5/2)\}$

2) $L = \left\{\left(1\frac{9}{10}/-8\frac{9}{10}\right)\right\}$

3) $L = \{(-2/3)\}$

4) $L = \{(-2/-\frac{5}{7})\}$

Lineare Gleichungssysteme: Gleichsetzungsmethode

1) $L = \{(1/3)\}$

2) $L = \{(2/9)\}$

Lineare Gleichungssysteme: Additionsmethode

1) $L = \{(13/4)\}$

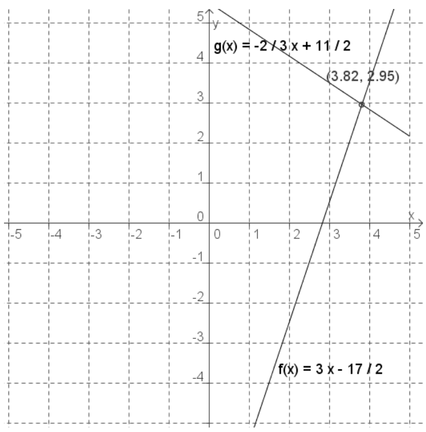
2) $L = \{(-\frac{1}{3}/2)\}$

3) $L = \{(\frac{10}{23}/\frac{1}{23})\}$

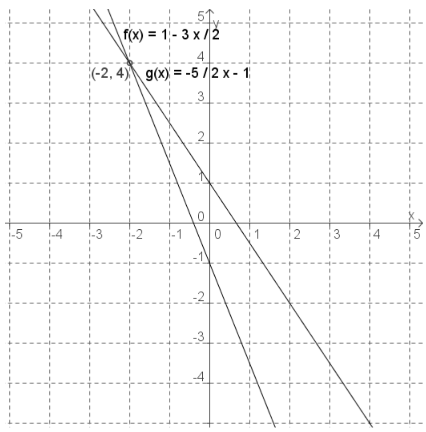
4) $L = \{(\frac{2}{3}/-\frac{13}{12})\}$

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen – Vermischtes

1)



2)



3) $\left| \begin{array}{l} 3x - 4y = -8 \\ 3x + 4y = -4 \end{array} \right|$

4) $L = \{x = 13 \wedge y = 3\}$

5) $L = \{(t,s) \mid (4,3)\}$

6) $L = \{(p,q) \mid (\frac{15}{28}, \frac{17}{21})\}$

7) $L = \{(m,n) \mid (-\frac{15}{2}, \frac{44}{3})\}$

8) $L = \{(g,h) \mid (\frac{16}{7}, \frac{55}{7})\}$

9) $L = \{(a,b) \mid (-\frac{113}{41}, -\frac{160}{41})\}$

10) $L = \{(f,k) \mid (-1{,}5)\}$

11) $L = \{(g,z) \mid (-\frac{23}{4}, -\frac{63}{16})\}$

12) $L = \{(d,w) \mid (\frac{48}{37}, \frac{60}{37})\}$

13) $L = \{\ \}$

Textaufgaben lineare Gleichungssysteme

1) 75

2) CHF 4350.- zu 10.5% und CHF 9750.- zu 9.5%

3) $\frac{2}{5}$

4) $m = \frac{1}{2};\ c = \frac{3}{2}$

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

1) $L=\{(x,y,z) \mid (3,0,-1)\}$

2) $L=\{(g,n,w) \mid (1,2,3)\}$

3) $L=\{(t,p,y) \mid (\frac{105}{11},\frac{175}{11},\frac{70}{11})\}$

4) $L=\{(a,b,c) \mid (-\frac{3}{13},-\frac{45}{13},\frac{5}{13})\}$

Textaufgaben LGS mit 3 Variablen

1) $\{4.5, 5.5, 6.5\}$

2) 6 Ziegen, 9 Gänse und 2 Kaninchen

3) $y = 2x^2 - 3x - 5$

Gleichungssysteme, die mit Substitution linear werden

1) $L=\{(q,a) \mid (5,\frac{-19}{6})\}$

2) $L=\{(x,y) \mid (\frac{4}{3},-5)\}$

3) $L=\{(a,b) \mid (5,-1)\}$

4) $L=\{(r,t) \mid (\frac{1}{2},\frac{4}{5})\}$

Potenzen – Ganzzahlige Potenzen umformen

Potenzen - Schreibweisen

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

2) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

3) $-3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot$

4) $-(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

5) $(-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3})$

6) $-\frac{1}{(\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3})} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

7) $\frac{1}{(-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3})} =$
$-3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot$

8) $\frac{1}{(\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3})} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

9) $3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}$

10) $-5 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = -5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

11) $-\frac{1}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$

12) $-(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{-(3)\cdot(3)\cdot(3)\cdot(3)}$

13) $\frac{3^2}{2^2}$

14) $\frac{1}{2^2} \cdot a^2$

15) $-2^3 a^3 b^3 c^3$

16) $9^2 + 4^2 + 2^3$

17) $-3^3 \cdot \frac{b^3}{x^3}$

18) $8 \cdot \frac{3^2}{4^2} - 10 \cdot \frac{3^2}{5^2} - 27 \cdot \frac{1}{3^3}$

Summen und Differenzen von Potenzen

1) -36

2) $-\frac{7}{36}$

3) $4a^2 + 3a - 1$

4) $7ab^2 - 2a^2b$

5) $6a^2b^2$

6) $3a^2b^2 - ab^2$

Multiplikation und Division mit Potenzen

1) 2^8

2) $\frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

3) a^4

4) $\frac{2}{b^2}$

5) a^{n+2}

6) a^{n+1}

7) $a^4 b^{3c}$

8) $\frac{a^2}{2b}$

9)

$$\begin{aligned}(4x^{2a-1} - 1)(b + 3x^{3a+5}) &= 4bx^{2a-1} + 12x^{(2a-1)+(3+5)} - b - 3x^{3a+5} \\ &= 4bx^{2a-1} + 12x^{5a+4} - b - 3x^{3a+5}\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}(4x^{2a-1} - 1)(x^{-3a} - 3x^{3a+5}) &= 4x^{2a-1-3a} + 12x^{(2a-1)+(3a+5)} - x^{-3a} - 3x^{3a+5} \\ &= \frac{4}{x^{a+1}} + 12x^{5a+4} - \frac{1}{x^{3a}} - 3x^{3a+5}\end{aligned}$$

Bruchrechnen mit Potenzen

1) $\frac{5^3}{3^4}$

2) $\frac{2^5 + 2^2 - 3^2}{2^2 - 3^2}$

3) $\frac{4a^3x^2 + 10n}{5x^4}$

4) $\frac{5a^2b - 9c^3n^2x}{n^4x^5}$

5) $\frac{5b^7}{3a^6}$

6) $\frac{9b^5}{4ad^9}$

7) $\frac{n^{2a}}{n^{4b}} = n^{2a-4b}$

8) $b^{3x+10y} - b^{12y-11x}$

9) $\frac{x+1}{b-1}$

10) $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

11) $\frac{3x}{y}$

12) $\frac{(x+y)^2}{5x}$

Potenzen von Potenzen

1) 2^6

2) $\frac{1}{3^4}$

3) $4^3 a^9$

4) 1

5) $\frac{b^6}{3^2 \cdot a^8}$

6) $\frac{2^6 \cdot d^{36}}{n^{12}}$

7) $n^{6(a-2b)}$

8) $b^{-a(3x+10y)}$

Potenzen von Summen

1) $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$

2) $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$

3) $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^3}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^3}\right)=\frac{1}{a^4}-\frac{2}{a^2b^3}+\frac{1}{b^6}$

4) $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)=$
$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

5) $(2a-1)(2a-1)(2a-1)(2a-1)=$
$16a^4-32a^3+24a^2-8a+1$

6) $\dfrac{1}{(2-3b)(2-3b)(2-3b)}=$
$\dfrac{1}{-27b^3+54b^2-36b+8}$

Faktorenzerlegung

1) $4x(2x+3)$

2) $7a^2x^2(4-3ax-5a)$

3) $(5+3x)(x^2+1)$

4) $(a-1)(a^2-a+1)(2a^2+3a+2)$

5) $(1-x)(1+x)$

6) $(\frac{1}{2}x-2)(\frac{1}{2}x+2)$

7) $c^2(c-2)(c+2)$

8) $(a+2)^2$

9) $(c-2)^2$

10) $2(d-3)^2$

11) $\frac{2(2a^3x^2+5n)}{5x^4}$

12) $\frac{a^2b(5-9anx)}{n^4x^5}$

13) $\dfrac{(a^2-a^t)(a^2-a^z)}{b^{x-1}(3-5b^3)}$

14) $b^{3y-x}(b^x-1)$

Terme mit Potenzen aufstellen

1) $\Delta A=\left(1+\frac{25}{1000}\right)^2-1=0.050625\approx 0.05$
$\Delta V=\left(1+\frac{25}{1000}\right)^3-1=0.07790625\approx 0.075$

2) Tanja: $T(x)=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$
Björn: $T(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x+2)$
Stefanie: $T(x)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot x$

3) CHF 15'980.30

4) $\frac{4n(n+1)}{2n+1}=2n+1-\frac{1}{2n+1}$

5) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

Rechnen mit Masseinheiten - Zehnerpotenzen

Rechnen mit Masseinheiten – Zehnerpotenzen

1) $45m^2$
2) $3'500'000cm^3$
3) $85'000mg$
4) $2.5 \cdot 10^{-9}\, m^3$
5) $4.8 \cdot 10^{-4} km^2$
6) $2 \cdot 10^1\, \frac{m}{s}$
7) $2.5m/s^2$
8) $$1.25\frac{g}{cm^3} = \frac{1.25 \cdot 10^{-3}}{(10^{-2})^3}\frac{kg}{m^3} = 1.25 \cdot 10^3\frac{kg}{m^3}$$
9) $$500\frac{dm^3}{h} = \frac{500 \cdot (10^{-1})^3}{3.6 \cdot 10^3}\frac{m^3}{s} = 1.39 \cdot 10^{-5}\frac{m^3}{s}$$
10) $$200\frac{N}{cm^2} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{(10^{-2})^2}\frac{kN}{m^2} = 2 \cdot 10^3\frac{kN}{m^2}$$

Rechnen mit Masseinheiten – Zehnerpotenzen - Textaufgaben

1) $2 \cdot 10^{-6}$ m
2) 600
3) $3.55926 \cdot 10^{12}$ Stk.
4) $3.17 \cdot 10^{-17}$ von einem Jahr
5) $9.109 \cdot 10^{-25}$ kg
6)
   a) $5.71 \cdot 10^{10}$
   b) $6.37 \cdot 10^6 m$
   c) $3 \cdot 10^8 m/s$
   d) $5.974 \cdot 10^{24} kg$
   e) $6.023 \cdot 10^{23}$
7)
   a) $1{,}3 \cdot 10^9 cm$
   b) $5 \cdot 10\ \mu m$
   c) $5{,}1 \cdot 10^{14} m^2$
   d) $1{,}083 \cdot 10^{21} m^3$
   e) $6 \cdot 10^{-11} m^3$
8) $$\frac{8 \cdot 10^{10} g}{4 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^2 g = 200g$$

Binome

1) $4x^2 + 28xy + 49y^2$
2) $9a^2 - 30ab + 25b^2$
3) $9a^4 - 12a^2b^3 + 4b^6$
4) $27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3$
5) $64x^3 + 96x^2y + 48xy^2 + 8y^3$
6) Einige wichtige Muster sind:
    - Jede Zeile beginnt und endet mit einer 1.
    - Die Zahlen innerhalb des Dreiecks sind symmetrisch.
    - Die Zahlen einer Zeile ergeben sich jeweils aus der Summe der zwei Zahlen der Reihe die zuvor steht.
7)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

8) $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

9) Es gibt genau 4 Pfade, um zur Zahl 4 im Pascal-Dreieck zu kommen. Dies ist für jede Zahl im Pascal-Dreieck so. Wenn wir folgendes Binom anschauen:

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

wird klar, dass es genau 4 Produkte der Form a^3b gibt. Anschaulich gesprochen:
Wenn der Entscheid, im Pascal-Dreieck nach links zu gehen «a» heisse, nach rechts zu gehen «b» heisse, dann liefert das Pascal-Dreieck die Antwort darauf wie viele Produkte a^3b es geben muss.
Analog für alle andern Produkte.

Wurzeln -Potenzen mit gebrochenen Exponenten I

1) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{3})^3$
2) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{2}} = 5^1 = 5$
3) $\sqrt{7}$
4) $11.447cm^2$

Wurzeln -Potenzen mit gebrochenen Exponenten II

1) $\sqrt{9}\cdot\sqrt{36} = 3\cdot 6 = 18$

2) $3\cdot\sqrt{2\cdot 25} = 3\cdot 5\cdot\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3\cdot 7} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} =$
$\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{7^2} = 3\cdot 7 = 21$

4) $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$

5) $\frac{\sqrt[3]{64a}}{\sqrt[3]{343b}} = \frac{\sqrt[3]{4^3a}}{\sqrt[3]{7^3b}} = \frac{\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{7^3}\cdot\sqrt[3]{b}} = \frac{4}{7}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

6) $\sqrt{\frac{\frac{5x}{60}}{\frac{10x}{30}}} = \frac{1}{2}$

7) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

8) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$ oder $\sqrt[3\cdot 2]{64} =$
$\sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2$

9)

Hans hat 1000 CHF zu folgenden Konditionen angelegt: 15 Jahre mit einem Zinsfuss von b %. Nach dieser Zeit hat er 2300 CHF.
In Anlehnung an Anwendungsbeispiel von Kapitel 4.1 Potenzen, schreiben wir:

$$1000 \xrightarrow{\cdot b} \ldots \xrightarrow{\cdot b} 2300$$

b ist der noch unbekannte Zinsfuss.

$$1000\cdot b^{15} = 2300 \quad |:1000$$
$$b^{15} = 2.3$$

Gesucht ist also die Lösung von:

$$b^{15} = 2.3$$

Dies ist die Basis b, die potenziert mit Exponent 15 den Wert 2.3 ergibt.

Es muss somit die 15-Wurzel aus 2.3 gezogen werden.

$$b^{15} = 2.3 \quad\Rightarrow\quad b = \sqrt[15]{2.3} = 1.0571$$

Der Operator b=1.0571 bedeutet nun:

$$1000 \quad \underbrace{\xrightarrow{\cdot 1.0571} \ldots \xrightarrow{\cdot 1.0571}}_{\text{15 mal mit diesem Operator multiplizieren}} \quad 2300$$

Nach dem ersten Jahr hat Hans 100% Kapital+5.71% Zins auf der Bank.

Hans hat das Geld zu 5.71% angelegt.

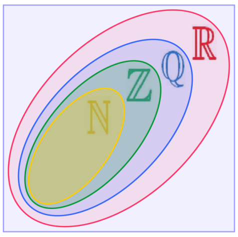
Mengenlehre

Mengenlehre I

1) Ø oder {} (lies: leere Menge) 2) $\mathbb{Q}$

3) Nein. Denn es gilt:
Zwei Mengen heissen gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, d.h. wenn jedes Element der einen Menge auch in der anderen vorkommt und umgekehrt.

4)



5) a) $A \cup B = \{2,4,5,6\}$ b) $A \cup G = \{1,2,3,4,5,6\}$ c) $A \cup \{\} = \{2,4,6\}$

6) a) $A \setminus B = \{2\}$ b) $B \setminus A = \{5\}$ c) $G \setminus A = \{1,3,5\}$ d) $A \setminus G = \{\}$

7)

	Natürliche Zahl	Ganze Zahl	Rationale Zahl	Irrationale Zahl	Reelle Zahl
17	x	x	x		x
-5		x	x		x
$\sqrt{3}$				x	x
$0.\overline{34}$			x		x
$\frac{3}{4}$			x		x

8) a) $A \cap B = \{4,6\}$ b) $A \cap G = \{2,4,6\}$ c) $A \cap \{\} = \{\}$

9) Die Teilmengen sind:
$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$
$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\},\{\}\}$

16 Möglichkeiten mit den Kindern den Nachmittag zu verbringen.

Also Formel: $2^4 = 16$ Möglichkeiten

Mögliche Erklärung:

Wenn wir alle Möglichkeiten als Tabelle darstellen sehen wir ein Muster. 1 bedeutet, dass das Kind gewählt wird. Null bedeutet, dass das Kind nicht gewählt wird.
So finden wir gezielt alle Möglichkeiten.

a	b	c	d
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

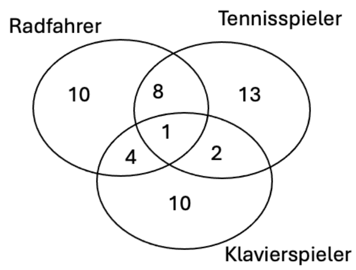
Da nun in jeder Zelle der Tabelle entweder eine o oder 1 stehen kann. Gibt es für jede der vier Zellen 2 Möglichkeiten, eine Zahl zu setzen.
Deshalb gibt es $2^4 = 16$ Möglichkeiten die Zahlen zu setzen.

10) Aufgrund der Überlegungen in Aufgabe 9) muss gelten: $2^3 = 8$ Teilmengen.

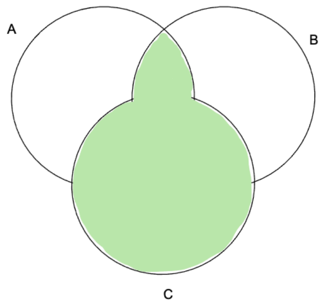
11)
a) Die Menge M ist die Schnittmenge von A und $B \Leftrightarrow M = A \cap B$
b) Die Menge M ist die Vereinigungsmenge von A und $B \Leftrightarrow M = A \cup B$
c) Die Menge M ist die Restmenge von A und $B \Leftrightarrow M = A \setminus B$

Mengenlehre II

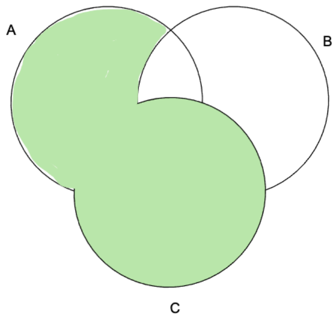
1)



2)



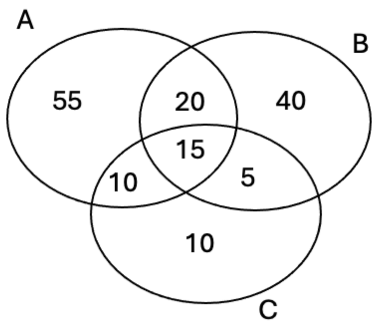
3)



4) Quadrate haben zusätzlich rechte Winkel. Die Rauten haben zwar ebenfalls alle 4 Seiten gleich lang, ihre Winkel sind jedoch nicht 90°.

5) Im Parallelogramm müssen je gegenüberliegende Seiten parallel sein. Im allgemeinen Viereck ist diese Eigenschaft nicht gefordert.

6) a)



b) 55 Haushalte verwenden nur Waschmittel A.

c) $|A|:|B|:|C| = 100:80:40 = 5:4:2$

7) 6) $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$